ივანე ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თეა შავაძე

ამონახსნის ვარიაციის ლოკალური ფორმულები არაწრფივი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის მრავალი დაგვიანებით და წყვეტილი საწყისი პირობით

მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში მეექვსე საფაკულტეტო კონფერენციაზე წარსადგენად დოქტორანტის კოლოკვიუმი 2

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე

ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

თბილისი 2018

ანოტაცია

არაწრფივი სამართი ფუნქციონლურ–დიფერენციალური განტოლებებისათვის მრავა-ლი მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში დამტკიცებულია ამონახსნის ვარიაციის ლოკალური ფორმულები, რომლებშიც გამოვლენილია წყვეტილი საწყისი პირობის, დაგვიანებებისა და საწყისი მომენტის შეშფოთებების ეფექტები.

Summary

For the nonlinear controlled functional differential equations with several constant delays in the phase coordinates the local variation formulas of solutions are proved, in which the effects of the discontinuous initial condition and perturbations of delays and the initial moment are detected.

სარჩევი

შესავალი

ნაშრომში, სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_s), u(t)) \tag{1}$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t), \quad t < t_0 \quad , x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

დამტკიცებულია ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები საწყისი მონაცემების ვარიაციის ახალი კლასის მიმართ. ამონახსნის ვარიაციის ლოკალური ფორმულა (შემოკლებით ვარიაციის ლოკალური ფორმულა) ეწოდება (1)–(2) ამოცანის ამონახსნის ნაზრდის მთავარი ნაწილის წრფივ წარმოდგენას ძირითადი ინტერვალის მარჯვენა ბოლოს რაიმე მიდამოში , საწყისი მონაცემების შეშფოთებების მიმართ. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი t_0 მომენტის, დაგვიანების τ_i, $i = \overline{1,s}$ პარამეტრების, საწყისი x_0 ვექტორის, საწყისი $\varphi(t)$ და მართვის $u(t)$ ფუნქციების ერთობლიობა.

(2) პირობას ეწოდება წყვეტილი საწყისი პირობა რადგანაც, საზოგადოდ, $\varphi(t_0) \neq x_0$. ე.ი. საწყის მომენტში ტრაექტორიისა და საწყისი ფუნქციის მნიშვნელობები, საზოგადოდ, ერთმანეთს არ ემთხვევა.

ნაშრომში სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები დამტკიცებულია სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის მრავალი დაგვიანებით და წყვეტილი საწყისი პირობით, როდესაც დაგვიანების პარამეტრების ვარიაციების $\delta\tau_i$–ს ნიშნები არ არის დაკავშირებული საწყისი მომენტის ვარიაციის ნიშანთან. ანალოგიური ვარიაციის ფორმულა განტოლებისათვის მართვის გარეშე

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_s))$$

(2) საწყისი პირობით, როცა საწყისი მონაცემების და მარჯვენა მხარის ვარიაცია ხდება დამტკიცებულია [7]-ში. [1]

თუ მოვითხოვთ, რომ $f(t, x, x_1, \dots, x_s, u)$ დამატებით აკმაყოფილებს (იხ. 1 სექციის (b), (c), (d) პირობები) პირობას: **(a)** $f_u(t, x, x_1, \dots, x_s, u)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $x, x_i \in O, i = \overline{1,s}$ ცვლადების მიმართ, მაშინ აქ დამტკიცებული ვარიაციის ფორმულა მიიღება [1]- დან. მნიშვნელოვანია იმის შენიშვნა, რომ წარმოდგენილ შრომაში ვარიაციის

ფორმულა დამტკიცებულია **(a)** პირობის გარეშე. ვარიაციის ფორმულები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებაში. ტერმინი „ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა“ შემოიღო რ. გამყრელიძემ და მან დაამტკიცა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის [2]. ვარიაციის ფორმულებში დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის საწყისი მომენტისა და წყვეტილი საწყისი პირობის შეშფოთების ეფექტები თავდაპირველად გამოავლინა თ. თადუმაძემ [3]-ში. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები სხვადასხვა კლასის ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლებისათვის შესწავლილია [4]-[6] შრომებში.

ნაშრომი შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან. პირველ პარაგრაფში დასმულია ამოცანა და მოყვანილია ძირითადი შედეგები.

მეორე პარაგრაფში მოყვანილი დამხმარე მტკიცებულებები. გამოთვლილია ნაზრდის მნიშვნელობა საწყის მომენტში და ნაზრდი შეფასებულია მცირე პარამეტრის მიმართ. ეს შეფასებები არსებითად გამოიყენება ძირითადი თეორემის დასამტკიცებლად.

მე–3 და მე-4 პარაგრაფებში დამტკიცებულია ძირითადი თეორემები, რომელიც ეხება ამონახსნის ვარიაციის ფორმულას იმ შემთხვევისთვის, როდესაც საწყის მომენტში ხდება მარცხნიდან და მარჯვნიდან ვარიაცია. ნაშრომი გამოსაქვეყნებლად წარდგენილია სამეცნიერო ჟურნალში Georgian Math. J.

1. ამოცანის დასმა და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ, $O \subset R^n$ და $U_0 \subset R^r$ არიან ღია სიმრავლეები. ვთქვათ, $0 < \theta_{i1} < \theta_{i2}, i = \overline{1,s}$ მოცემული რიცხვებია და n–განზომილებიანი $f(t, x, x_1, \dots, x_s, u)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(b) თითქმის ყველა ფიქსირებული $t \in I = [a, b]$ წერტილისათვის ფუნქცია

$$f(t,\cdot): \ O^{1+s} \times U_0 \to R^n$$

უწყვეტად წარმოებადია;

(c) ყოველი ფიქსირებული $(x, x_1, \dots, x_s, u) \in \ O^{1+s} \times U_0$ წერტილისათვის ფუნქციები

$$f(t, x, x_1, ..., x_s, u),\ f_x(t, x, x_1, ..., x_s, u),\ f_{x_i}(t, x, x_1, ..., x_s, u), i = \overline{1,s},\ f_u(t, x, x_1, ..., x_s, u)$$

ზომადია I ინტერვალზე;

(d) ნებისმიერი $K \subset O$ და $U \subset U_0$ კომპაქტებისათვის არსებობს ისეთი ფუნქცია $m_{K,U}(t) \in L_1(I, [0, \infty))$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| f(t, x, x_1, ..., x_s, u) \right| + \left| f_x(t,\cdot) \right| + \sum_{i=1}^{s} \left| f_{x_i}(t,\cdot) \right| + + \left| f_u(t,\cdot) \right| \le m_{K,U}(t)$$

ყოველი $(x, x_1, \dots, x_s, u) \in \ K^{1+s} \times U_0$ და თითქმის ყველა $t \in I$.

დავუშვათ, ϕ არის უწყვეტი $\varphi: I_1 \to R^n$ ფუნქციების სივრცე, სადაც $I_1 = [\hat{\tau}, b]$, $\hat{\tau} = a - max\{\theta_{12}, \dots, \theta_{s2}\}$; შემდეგ, Ω არის ზომადი $u: I \to R^r$ ფუნქციების სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $clu(I) \subset U_0$, სადაც $clu(I)$ აღნიშნავს $u(I)$ სიმრავლის ჩაკეტვას და ის არის კომპაქტი R^r-ში.

ყოველ $\mu = (t_0, \tau_1, \dots, \tau_s, x_0, \varphi, u) \in \Lambda = [a, b) \times [\theta_{11}, \theta_{12}] \times \dots \times [\theta_{s1}, \theta_{s2}] \times O \times \Phi \times \Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_s), u(t)) \qquad (1.1)$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t), \quad t < t_0 \ \ , x(t_0) = x_0 \qquad (1.2)$$

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ $\mu = (t_0, \tau_1, \dots, \tau_s, x_0, \varphi, u) \in \Lambda$. ფუნქციას $x(t) = x(t;\mu) \in O$, სადაც $t \in [\hat{\tau}, t_1]$, $t_1 \in (t_0, b]$ ეწოდება (1.1) განტოლების ამონახსნი (1.2) საწყისი პირობით, ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_1]$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (1.2) პირობას და აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0, t_1]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას თითქმის ყველგან $[\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1]$ ინტერვალზე. ვთქვათ, $\mu_0 = (t_{00}, \tau_{10}, \dots, \tau_{s0}, x_{00,} \varphi_0, u_0) \in \Lambda$ ფიქსირებული ელემენტია და ვთქვათ, $x_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_{10}]$ ინტერვალზე, სადაც სადაც $t_{00}, t_{10} \in (a, b)$, $t_{00} < t_{10}$ და $\tau_{i0} \in (\theta_{i1}, \theta_{i2})$, $i = \overline{1, s}$.

შემოვიღოთ ვარიაციის სიმრავლე

$$V = \{\delta\mu = (\delta t_0, \delta\tau_1, \dots, \delta\tau_s, \delta x_0, \delta\varphi, \delta u) \colon \delta t_0 \in (a, b) - t_{00},$$

$$\delta\tau_i \in (\theta_{i1}, \theta_{i2}) - \tau_{i0}, \qquad i = \overline{1, s}, \ \delta x_0 \in O - x_{00}, \ \delta\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta\varphi_i,$$

$$\delta\varphi_i \in \Phi - \varphi_0, \qquad i = \overline{1, k}\,, \quad \delta u_i \in \Omega - u_0, \qquad |\delta t_0| \le \alpha, \qquad |\delta\tau_i| \le \alpha, \qquad i = \overline{1, s}\,,$$

$$|\delta x_0| \le \alpha, |\lambda_i| \le \alpha, i = \overline{1, k}\,, \|\delta u\| \le \alpha\}$$

სადაც $\alpha > 0$ ფიქსირებული რიცხვია, $(a, b) - t_{00} = \{\delta t_0 = t_0 - t_{00}, \ \forall\, t_0 \in (a, b)\}$ და $\|\delta u\| = sup\{|\delta u(t)| \colon t \in I\}$.

არსებობენ რიცხვები $\delta_1 > 0$ და $\varepsilon_1 > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერ $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_1) \times V$ ელემენტს $\mu_0 + \varepsilon\delta\mu \in \Lambda$ შეესაბამება ამონახსნი $x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრული ინტერვალზე $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \subset I_1$. ცხადია, რომ $x(t; \mu_0)$ ამონახსნი არის $x_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ ინტერვალზე. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_0(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია ინტერვალზე $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$. განვსაზღვროთ $x_0(t) = x(t; \mu_0)$ ამონახსნის ნაზრდი

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta\mu) = x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - x_0(t), (t, \varepsilon, \delta\mu) = [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \times (0, \varepsilon_1) \times V.$$

ამოცანის ფორმულირება: წარმოვადგინოთ ამონახსნის ნაზრდი $\Delta x(t; \varepsilon\delta\mu)$ ორი შესაკრების სახით ისეთნაირად, რომ პირველი შესაკრები იყოს ε–ის მიმართ პირველი ხარისხის , ხოლო მისი კოეფიციენტი საწყისი მონაცემის შეშფოთებების მიმართ იყოს წრფივი ასახვა. ამასთან,მეორე შესაკრები ε-თან შედარებით იყოს მაღალი რიგის

უსასრულოდ მცირე თანაბრად ვარიაციის სიმრავლის მიმართ. ქვემოთ მოყვანილი თეორემები არის ნაშრომის ძირითადი შედეგი.

თეორემა 1.1. ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.1) $\tau_{s0} > \cdots > \tau_{10}$ და $t_{00} + \tau_{s0} < t_{10}$;

1.2) ფუნქცია $\varphi_0(t)$ აბსოლუტურად უწყვეტია და ფუნქცია $\dot{\varphi}_0(t), t \in I_1$ შემოსაზღვრულია;

1.3) ფუნქცია $f(w,u)$, $w = (t, x, x_1, \ldots, x_s) \in I \times O^{1+s}$ შემოსაზღვრულია $I \times O^{1+s} \times U_0$ სიმრავლეზე;

1.4) არსებობენ სასრული ზღვრები

$$\lim_{w \to w_0} f\big(w, u_0(t)\big) = f^-,\ w \in (a, t_{00}] \times O^{1+s},$$

სადაც $w_{0=}\big(t_{00}, x_{00}, \varphi_0(t_{00} - \tau_{10}), \ldots, \varphi_0(t_{00} - \tau_{s0})\big)$;

1.5) არსებობენ სასრული ზღვრები

$$\lim_{(w_{1i,}w_{2i,}) \to w_{1i}^0, w_{2i}^0)} [f\big(w_{1i}, u_0(t)\big) - f(w_{2i}, u_0(t)] = f_i,$$

სადაც $w \in (a,b) \times O^{1+s}, i = \overline{1,s}$,

$$w_{1i}^0 = (t_{00} + \tau_{i0}, x_0(t_{00} + \tau_{i0}), x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{10}), \ldots, x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i-10}),$$

$$x_{00}\,, \varphi_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i+10}) \ldots, \varphi_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{s0})\big),$$

$$w_{2i}^0 = (t_{00} + \tau_{i0}, x_0(t_{00} + \tau_{i0}), x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{10}), \ldots, x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i-10}),$$

$$\varphi_0(t_{00})\,, \varphi_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i+10}) \ldots, \varphi_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{s0})\big),$$

მაშინ არსებობენ $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ რიცხვები, სადაც $t_{10} - \delta_1 > t_{00} + \tau_{s0}$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [t_{10} - \delta_1, t_{10} + \delta_1] \times (0, \varepsilon_2) \times V^-$, სადაც $V^- = \{\delta\mu \in V: \delta t_0 \leq 0\}$

ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\delta x(t;\delta\mu) + o(t;\varepsilon\delta\mu)\,. \tag{1.3}$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu) = -Y(t_{00};t)f^-\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu), \tag{1.4}$$

$$\beta(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\delta x_0 - \left[\sum_{i=1}^{s} Y(t_{00} + \tau_{i0};t)f_i\right]\delta t_0 - \sum_{i=1}^{s}[Y(t_{00} + \tau_{i0};t)f_i$$

$$+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\,\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\Big]\,\delta\tau_i \tag{1.5}$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t} Y(\xi+\tau_{i0};t) f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\,\delta\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_u[\xi]\,\delta u(\xi)d\xi,$$

სადაც იგულისხმება, რომ

$$\int\limits_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\,\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi=\int\limits_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{i0}} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\,\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi$$

$$\int\limits_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\,\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi.$$

$Y(s;t)$ არის $n\times n$ მატრიც–ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$Y_s(s;t)=-Y(s;t)f_x[s]-\sum_{i=1}^{s} Y(s+\tau_{i0};t) f_{x_i}[s+\tau_{i0}], \qquad s\in[t_{00},t] \tag{1.6}$$

და პირობას

$$Y(s;t)=\begin{cases} H, s=t, \\ \Theta, s>t. \end{cases} \tag{1.7}$$

აქ H არის ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო Θ ნულოვანი მატრიცა,

$$f_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}=f, f_{x_i}[s]=f_{x_i}(s,x_0(s),x_0(s-\tau_{10}),\ldots,x_0(s-\tau_{s0}),u_0(s)),$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{o(t;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}=0$ თანაბრად $(t,\delta\mu)\in[t_{10}-\delta_1,t_{10}+\delta_1]\times V^-$.

ზოგიერთი კომენტარი.

ა) $\delta x(t;\delta\mu)$ ეწოდება ამონახსნის ვარიაცია, ხოლო (1.4) ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა;

ბ) შესაკრები

$$-\left[Y(t_{00};t)f^-+\sum_{i=1}^{s} Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i\right]\delta t_0-\sum_{i=1}^{s}\Big[Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i$$

$$+\int\limits_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\,\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\Big]\,\delta\tau_i$$

(1.4)-ში არის (1.2) წყვეტილი საწყისი პირობის, საწყისი t_{00} მომენტის და დაგვიანებების $\tau_{i0},\ i=\overline{1,s}$ შეშფოთების ეფექტი;

გ) გამოსახულება

$$Y(t_{00};t)\delta x_0+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\,\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_u[\xi]\,\delta u(\xi)d\xi$$

(1.4)-ში არის საწყისი x_{00} ვექტორის, საწყისი $\varphi_0(t)$ ფუნქციის და მართვის $u(t)$ ფუნქციის შეშფოთებების ეფექტი;

თეორემა 1.2. ვთქვათ, შესრულებულია თეორემა 1.1-ის 1.1)-1.3) და 1.5) პირობები. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{w\to w_0}f\big(w,u_0(t)\big)=f^+,\ w\in[t_{00},b)\times O^{1+s} \tag{1.8}$$

მაშინ არსებობენ $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2\in(0,\delta_1)$ რიცხვები, სადაც $t_{10}-\delta_1>t_{00}+\tau_{s0}$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[t_{10}-\delta_1,t_{10}+\delta_1]\times(0,\varepsilon_2)\times V^+$, სადაც $V^+=\{\delta\mu\in V:\delta t_0\geq 0\}$

ადგილი აქვს (1.4) ფორმულას, სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu)=-Y(t_{00};t)f^+\delta t_0+\beta(t;\delta\mu).$$

თეორემა 1.3. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1.1-ის 1.1)-1.5) და (1.8) პირობები. ამასთან, $f^-=f^+:=\hat{f}$. მაშინ არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2\in(0,\delta_1)$, სადაც $t_{10}-\delta_1>t_{00}+\tau_{s0}$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[t_{10}-\delta_1,t_{10}+\delta_1]\times(0,\varepsilon_2)\times V$, ადგილი აქვს (1.3) ტოლობას, სადაც $\delta x(t;\delta\mu)=-Y(t_{00};t)\hat{f}\delta t_0+\beta(t;\delta\mu)$.

2. დამხმარე მტკიცებულებები

ყოველ $\mu=(t_0,\tau_1,\dots,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in\Lambda$ ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{y}(t)=f(t_0,\tau_1,\dots,\tau_s,\varphi,y,u)(t) \tag{2.1}$$

საწყისი პირობით

$$y(t_0)=x_0 \tag{2.2}$$

სადაც

$$f(t_0,\tau_1,\dots,\tau_s,\varphi,y,u)(t)=f(t,y(t),h(t_0,\varphi,y)(t-\tau_1),\dots,h(t_0,\varphi,y)(t-\tau_s),u(t))$$

და $h(t_0,\varphi,y)(t)$ ოპერატორი განისაზღვრება ფორმულით

$$h(t_0,\varphi,y)(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[\hat{\tau},t_0),\\ y(t), & t\in[t_0,b].\end{cases} \tag{2.3}$$

განსაზღვრება 2.1. ვთქვათ, $\mu=(t_0,\tau_1,\dots,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in\Lambda$. აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას $y(t)=y(t;\mu)\in O$, სადაც $t\in[r_1,r_2]\subset I$, ეწოდება (2.1) განტოლების ამონახსნი (2.2) საწყისი პირობით, ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, განსაზღვრული $[r_1,r_2]$ ინტერვალზე, თუ $t_0\in[r_1,r_2]$, $y(t_0)=\varphi(t_0)$ და ფუნქცია $y(t)$ აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას თითქმის ყველგან $[\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2]$ ინტერვალზე.

შენიშვნა 2.1. ვთქვათ, $y(t)=y(t;\mu)\in O, t\in[r_1,r_2]\subset I$ იყოს $\mu=(t_0,\tau_1,\dots,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ ფუნქცია

$$x(t;\mu)=h\big(t_0,\varphi,y(\cdot;\mu)\big)(t), t\in[r_1,r_2] \tag{2.4}$$

ლემა 2.1. ვთქვათ $y_0(t)$ იყოს $\mu_0=(t_{00},\tau_{10},\dots,\tau_{s0},x_{00},\varphi_0,u_0)\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული ინტერვალზე $[r_1,r_2]\subset(a,b)$; ვთქვათ $t_{00}\in[r_1,r_2),\tau_{i0}\in(\theta_{i1},\theta_{i2})$, $i=\overline{1,s}$ და ვთქვათ $K_1\subset O$ არის კომპაქტ სიმრავლე, რომელიც მოიცავს $\varphi_0(I_1)\cup y_0([r_1,r_2])$ სიმრავლის მიდამოს. მაშინ არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_1>0$ და $\delta_1>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_1)\times V$, გვაქვს $\mu_0+\varepsilon\delta\mu\in\Lambda$. ამასთან, ამ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრულია ინტერვალზე $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_2]\subset I$. უფრო მეტიც,

$$\begin{cases}\varphi(t):=\varphi_0(t)+\varepsilon\delta\varphi(t)\in K_1, & t\in I_1,\\ y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)\in K_1, & t\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_2].\end{cases}$$

და

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)=y(t;\mu_0)$$

თანაბრად $(t,\delta\mu)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_2]\times V$.

ეს ლემა არის თეორემა 1.7-ის შედეგი ([1], გვ.20).

ლემა 2.2. ვთქვათ $x_0(t)$ იყოს $\mu_0\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული ინტერვალზე $[\hat{\tau},t_{10}]$, ვთქვათ $t_{00},t_{10}\in(a,b),\tau_{i0}\in(\theta_{i1},\theta_{i2})$, $i=\overline{1,s}$ და ვთქვათ $K_1\subset O$ არის კომპაქტ სიმრავლე, რომელიც მოიცავს $\varphi_0(I_1)\cup x_0([t_{00},t_{10}])$ სიმრავლის მიდამოს. მაშინ არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_1>0$ და $\delta_1>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_1)\times V$, გვაქვს $\mu_0+\varepsilon\delta\mu\in\Lambda$. ამასთან, ამ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრულია ინტერვალზე $[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]\subset I_1$. უფრო მეტიც, $x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)\in K_1$, $t\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ ლემა 2.1 - ში ჩავსვამთ $r_1=t_{00}$, $r_2=t_{10}$, მაშინ $x_0(t)=y_0(t)$ და $x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)=h\big(t_0,\varphi,y(\cdot;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)\big)(t)$, $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]\times(0,\varepsilon_1)\times V$. (იხ. 2.4). ამდენად ლემა 2.2 არის შედეგი ლემა 2.1-ის.

შენიშვნა 2.2. ერთადერთობის გამო, $y(t;\mu_0)$ ამონახსნი არის $y_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_2]$ ინტერვალზე. ამდენად, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $y_0(t)$ $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_2]$ ინტერვალზე.

ლემა 2.1-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_2]\times(0,\varepsilon_1)\times V$, $y_0(t)=y(t;\mu_0)$ ამონახსნის ნაზრდი ასე განისაზღვრება:

$$\Delta y(t)=\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)-y_0(t). \tag{2.5}$$

ცხადია,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=0$$

თანაბრად $(t,\delta\mu)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_2]\times V$ (იხ. ლემა 2.1).

ლემა 2.3. ვთქვათ, $\tau_{s0}>\cdots>\tau_{10}$ და $t_{00}+\tau_{s0}\le r_2$. ამასთან, ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1.1-ის (1.2)-(1.4) პირობები. მაშინ არსებობს რიცხვი $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ ისეთი, რომ

$$\max_{t\in[t_{00},r_2+\delta_1]}|\Delta y(t)|\le O(\varepsilon\delta\mu)$$

ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_2] \times V^-$, სადაც

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{O(\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon} = g(\delta\mu)$ თანაბრად $(\delta\mu) \in V^-$ და $|g(\delta\mu)| \leq const.$

ამასთან,

$$\Delta y(t_{00}) = \varepsilon[\delta x_0 - f^- \delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu).$$

ლემა 2.4. ვთქვათ, $\tau_{s0} > \cdots > \tau_{10}$ და $t_{00} + \tau_{s0} \leq r_2$. ამასთან, ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1.1-ის (1.2), (1.3) პირობები და (1.8) პირობა. მაშინ არსებოს რიცხვი $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ ისეთი, რომ

$$\max_{t \in [t_0, r_2 + \delta_1]} |\Delta y(t)| \leq O(\varepsilon\delta\mu)$$

ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_2] \times V^+$.

ამასთან,

$$\Delta y(t_0) = \varepsilon[\delta x_0 - f^+ \delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu).$$

ლემები 2.3 და 2.4 შესაძლებელია დამტკიცდეს ლემების 2.9-ისა და 2.10-ის ანალოგიურად, შესაბამისად (იხ. [1], გვ. 38 და გვ. 48).

3. თეორემა 1.1 –ის დამტკიცება

ლემა 2.1.-ში ვთქვათ, $r_1 = t_{00}, r_2 = t_{10}$, მაშინ

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), t \in [\hat{\tau}, t_{00}), \\ y_0(t), t \in [t_{00}, t_{10}] \end{cases}$$

და ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V^-$

$$x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) = \begin{cases} \varphi(t) := \varphi_0(t) + \varepsilon\delta\varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0), \\ y(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) \in K_1, \quad t \in [t_0, t_{10} + \delta_1] \end{cases}$$

(იხ. (2.4)). შევნიშნოთ, რომ $\delta\mu \in V^-$, ე.ი. $t_0 < t_{00}$, აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t), \quad t \in [\hat{\tau}, t_0), \\ y(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - \varphi_0(t), t \in [t_0, t_{00}) \\ \Delta y(t), t \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1] \end{cases}$$

(იხ. (1.3) და (2.5)). ლემა 2.3-იდან გამომდინარე გვაქვს

$$|\Delta x(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu), \forall(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1] \times [0, \varepsilon_2] \times V^-, \tag{3.1}$$

$$\Delta x(t_{00}) = \varepsilon[\delta x_0 - f^-\delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{3.2}$$

ფუნქცია $\Delta x(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta} x(t) = f[t, x_0 + \Delta x] - f[t] = f_x[t]\Delta x(t) + \sum_{i=1}^{s} f_{x_i}[t]\Delta x(t - \tau_{i0})$$

$$+\varepsilon f_u[t]\delta u(t) + \theta_1(t; \varepsilon\delta\mu), \ t \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1] \tag{3.3}$$

სადაც

$$f[t, x_0 + \Delta x] = f(t, x_0(t) + \Delta x(t), x_0(t - \tau_1) + \Delta x(t - \tau_1), \dots, x_0(t - \tau_s) + \Delta x(t - \tau_s),$$

$$u_0(t) + \Delta\delta u(t), \ f[t] = f(t, x_0(t), x_0(t - \tau_{10}), \dots, x_0(t - \tau_{s0}), u_0(t)), \tag{3.4}$$

$$\theta_1(t; \varepsilon\delta\mu) = f[t, x_0 + \Delta x] - f[t] - f_x[t]\Delta x(t) - \sum_{i=1}^{s} f_{x_i}[t]\Delta x(t - \tau_{i0}) - \varepsilon f_u[t]\delta u(t)$$

კოშის ფორმულის გამოყენებით (3.3) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\Delta x(t)=Y(t_{00};t)\Delta x(t_{00})+\varepsilon\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_u\,[\xi]\delta u(\xi)d\xi+\sum_{p=0}^{1}R_p, \tag{3.5}$$

სადაც

$$\begin{cases} R_0 \coloneqq R_0(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=1}^{s}R_{i0},\\ R_{i0}=\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}\,[\xi+\tau_{i0}]\Delta x(\xi)d\xi\\ R_1 \coloneqq R_1(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)\theta_1(t;\varepsilon\delta\mu)\,d\xi \end{cases} \tag{3.6}$$

$Y(\xi;t)$ არის მატრიც-ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1.6) განტოლებას და (1.7) პირობას. ვთქვათ, $\delta_2\in(0,\delta_1)$ იყოს იმდენად მცირე, რომ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ უტოლობებს: $t_{00}-\delta_2>a,\ t_{00}+\tau_{s0}<t_{10}-\delta_2$. $Y(\xi;t)$ ფუნქცია უწყვეტია სიმრავლეზე $\Pi=\{(\xi;t):\ a<\xi<t, t\in I\}$ ლემა 2.6-ის თანახმად (იხ. [1], გვ.32).

ამდენად,

$$Y(t_{00};t)\Delta x(t_{00})=\varepsilon Y(t_{00};t)[\delta x_0-f^{-}\delta t_0]+o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{3.7}$$

(იხ. (3.2)). ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$R_{i0}=\varepsilon\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_0}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}\,[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}\,[\xi+\tau_{i0}]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$=\varepsilon\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}\,[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_{t_0+\tau_{io}}^{t_{00}+\tau_{io}}Y(\xi;t)f_{x_i}\,[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

სადაც $o(t;\varepsilon\delta\mu)=Y(t_{00},t)o(\varepsilon\delta\mu)$.

ამდენად,

$$R_0=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{io}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}\,[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_0+\tau_{io}}^{t_{00}+\tau_{io}}Y(\xi;t)f_{x_i}\,[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{3.8}$$

ვთქვათ, $\rho_{i,1} = \min\{t_0 + \tau_i, t_{00} + \tau_{i0}\}$, $\rho_{i,2} = \max\{t_0 + \tau_i, t_{00} + \tau_{i0}\}$ და ვთქვათ $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ იმდენად მცირე რიცხვი იყოს, რომ

$$t_{00} < \rho_{1,1}, \qquad \rho_{i,2} < \rho_{i+1,1}, \qquad i = \overline{1, s-1}, \;\; \rho_{s,2} < t_{10} - \delta_2.$$

ვთქვათ, $\theta_2(\xi; t, \varepsilon\delta\mu) \coloneqq Y(\xi; t)\theta_1(\xi; \varepsilon\delta\mu)$, მაშინ თუ $t \in [t_{10} - \delta_2, t_{10} + \delta_2]$, გვაქვს

$$R_1 = \sum_{i=0}^{s} w_i, \text{ სადაც } w_0 = w_0(t, \varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}} \theta_2(\xi; t, \varepsilon\delta\mu) d\xi,$$

$$w_i = \int\limits_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_{00}+\tau_{i+10}} \theta_2(\xi; t, \varepsilon\delta\mu) d\xi, \;\; i = \overline{1, s-1}, \;\; w_s = \int\limits_{t_{00}+\tau_{s0}}^{t} \theta_2(\xi; t, \varepsilon\delta\mu) d\xi.$$

ვთქვათ, $\rho_{1,1} = t_0 + \tau_1$ და $t_0 + \tau_1 < t_{00} + \tau_{10}$, მაშინ გვაქვს $w_0 = w_{01} + w_{02}$.

აქ

$$w_{01} = \int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} \theta_2(\xi; t, \varepsilon\delta\mu) d\xi, \quad w_{02} = \int\limits_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi; t)\{f[\xi; x_0 + \Delta x] - f[\xi]\}\, d\xi$$

$$- \int\limits_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi; t)\left[f_x[\xi]\Delta x(\xi) + \sum_{i=2}^{s} f_{x_i}[\xi]\Delta x(\xi - \tau_{i0})\right] d\xi$$

$$- \int\limits_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi; t) f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi - \tau_{10})\, d\xi - \int\limits_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi; t) f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi - \tau_{10})\, d\xi$$

$$-\varepsilon \int\limits_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi; t) f_u[\xi]\delta u(\xi)\, d\xi$$

(იხ. (3.4)). შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f[\xi; \theta, \varepsilon\delta\mu] = f(\xi, x_0(\xi) + \theta\Delta x(\xi), x_0(\xi - \tau_{10}) + \theta\{x_0(\xi - \tau_1) - x_0(\xi - \tau_{10}) + \Delta x(\xi - \tau_1)\}, \ldots, x_0(\xi - \tau_{s0})$$

$$+\theta\{x_0(\xi - \tau_s) - x_0(\xi - \tau_{s0}) + \Delta x(\xi - \tau_s)\}, u_0(\xi) + \theta\varepsilon\delta u(\xi)\big),$$

$$\sigma(\xi; \theta, \varepsilon\delta\mu) = f_x[\xi; \theta, \varepsilon\delta\mu] - f_x[\xi], \sigma_i(\xi; \theta, \varepsilon\delta\mu) = f_{x_i}[\xi; \theta, \varepsilon\delta\mu] - f_{x_i}[\xi],$$

$$\sigma_u(\xi; \theta, \varepsilon\delta\mu) = f_u[(\xi; \theta, \varepsilon\delta\mu)] - f_u[\xi].$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$f[\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu] \ -f[\xi] \ =\int\limits_0^1 \frac{d}{d\theta} f[\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu]d\theta$$

$$=\int\limits_0^1 \Big\{ f_x[\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu]\Delta x(\xi)+\sum_{i=1}^{s} f_{x_i}[\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu]\{x_0(\xi-\tau_i)-x_0(\xi-\tau_{i0})+\Delta x(\xi-\tau_i)\}$$

$$+\varepsilon f_u[\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu]\delta u(\xi)\}d\theta=\sigma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)\Delta x(\xi)$$

$$\sum_{i=1}^{s} \sigma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu)\{x_0(\xi-\tau_i)-x_0(\xi-\tau_{i0})+\Delta x(\xi-\tau_i)\}+\varepsilon\sigma_u(\xi;\varepsilon\delta\mu)\delta u(\xi)$$

$$+f_x[\xi]\Delta x(\xi)+\sum_{i=1}^{s} f_{x_i}[\xi]\big(x_0(\xi-\tau_i)-x_0(\xi-\tau_{i0})+\Delta x(\xi-\tau_i)\big)+\varepsilon f_u[\xi]\delta u(\xi)$$

სადაც

$$\sigma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)=\int\limits_0^1 \sigma(\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu)d\theta,\ \ \sigma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu)=\int\limits_0^1 \sigma_i(\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu)d\theta,$$

$$\sigma_u(\xi;\varepsilon\delta\mu)=\int\limits_0^1 \sigma_u(\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu)d\theta.$$

უკანასკნელი ტოლობისათვის, როცა $t\in[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2]$ გვაქვს

$$w_{01}=\textstyle\sum_{p=1}^{5} w_{01}^{p},\ \text{სადაც}\ w_{01}^{1}=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\,\sigma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)\Delta x(\xi)d\xi$$

$$w_{01}^{2}=\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\,\sigma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu)\big(x_0(\xi-\tau_i)-x_0(\xi-\tau_{i0})+\Delta x(\xi-\tau_i)\big)d\xi$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\,\sigma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu)\big(\varphi_0(\xi-\tau_i)-\varphi_0(\xi-\tau_{i0})+\varepsilon\delta\varphi(\xi-\tau_i)\big)d\xi,$$

$$w_{01}^{3}=\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\,f_{x_i}[\xi]\big(x_0(\xi-\tau_i)-x_0(\xi-\tau_{i0})\big)d\xi$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\,f_{x_i}[\xi]\big(\varphi_0(\xi-\tau_i)-\varphi_0(\xi-\tau_{i0})\big)d\xi,$$

$$w_{01}^4=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\,f_{x_i}[\xi]\big(\Delta x(\xi-\tau_i)-\Delta x(\xi-\tau_{i0})\big)d\xi$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\,f_{x_i}[\xi]\big(\delta\varphi(\xi-\tau_i)-\delta\varphi(\xi-\tau_{i0})\big)d\xi,$$

$$w_{01}^5=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\,\sigma_u(\xi;\varepsilon\delta\mu)\delta u(\xi)d\xi.$$

ფუნქცია $\varphi_0(\xi),\ \xi\in I_1$ აბსოლუტურად უწყვეტია, ამიტომ ყოველი ფიქსირებული ლებეგის წერტილისთვის $\xi\in(t_{00},t_{10}+\delta_1)$ ფუნქციისთვის $\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})$ მივიღებთ

$$|\varphi_0(\xi-\tau_i)-\varphi_0(\xi-\tau_{i0})|\le\int_{\xi}^{\xi-\varepsilon\delta\tau_i}\dot{\varphi}_0(\zeta-\tau_{i0})\,d\zeta=-\varepsilon\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})\delta\tau_i+\gamma_i(\xi,\varepsilon\delta\mu) \tag{3.9}$$

სადაც

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\gamma_i(\xi_i,\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}=0,\text{თანაბრად } \delta\mu\in V^- \tag{3.10}$$

ამდენად, (3.9) სამართლიანია თითქმის ყველა წერტილისთვის $(t_{00},t_{10}+\delta_2$ ინტერვალიდან. (3.9)-დან, $\dot{\varphi}_0(t)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობიდან გამომდინარეობს გვაქვს

$$|\varphi_0(\xi-\tau_i)-\varphi_0(\xi-\tau_{i0})|\le O(\varepsilon\delta\mu)\qquad\text{და}\qquad\left|\frac{\gamma_i(\xi_i,\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\right|\le const. \tag{3.11}$$

(3.1) და (3.10) გამოსახულებებზე დაყრდნობით, $w_{01}^p,\ p=\overline{1,5}$, გამოსახულებებისთვის გვაქვს

$$|w_{01}^1|\le\|Y\|O(\varepsilon\delta\mu)\sigma_1(\varepsilon\delta\mu),\qquad|w_{01}^2|\le\|Y\|O(\varepsilon\delta\mu)\sum_{i=1}^{s}\sigma_{i1}(\varepsilon\delta\mu),$$

$$w_{01}^3=\sum_{i=1}^{s}\left[\gamma_{i1}(t;\varepsilon\delta\mu)-\varepsilon\left(\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})\,d\xi\right)\delta\tau_i\right],$$

$$|w_{01}^4|\le o(\varepsilon\delta\mu)\|Y\|\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}\left|f_{x_i}[\xi]\right|d\xi,\left|w_{01}^5\right|\le\varepsilon\|Y\|O(\varepsilon\delta\mu)\sigma_u(\varepsilon\delta\mu).$$

აქ

$$\sigma_1(\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau_{10}} |\sigma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)|\,d\xi, \sigma_{i1}(\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau_{10}} |\sigma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu)|\,d\xi$$

$$\sigma_u(\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau_{10}} |\sigma_u(\xi;\varepsilon\delta\mu)|\,d\xi;\ \|Y\| = sup\{\|Y(\xi;t)\|:(\xi;t)\in\Pi\},$$

$$\gamma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\gamma_i(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi.$$

ცხადია,

$$\left|\frac{\gamma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\right| \le \|Y\| \int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}} \left|f_{x_i}[\xi]\right| \left|\frac{\gamma_i(\xi_i,\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\right| d\xi.$$

ლებეგის თეორემის ძალით, ზღვრის ნიშნის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შეტანის შესახებ, გვაქვს

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_1(\varepsilon\delta\mu) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_{i1}(\varepsilon\delta\mu) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_u(\varepsilon\delta\mu) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\gamma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\right| = 0$$

თანაბრად $(t,\delta\mu)\in[t_{00},t_{00}+\tau_{10}]\times V^-$ (იხ. (3.10) და (3.11)).

ამდენად,

$$w_{01}^1 = w_{01}^2 = w_{01}^4 = w_{01}^5 = o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{3.12}$$

და

$$w_{01}^3 = -\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})\,d\xi\right]\delta\tau_i + o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

ამასთან, როცა $\xi\in[t_{00},t_{00}+\tau_{i0})$

$$\varepsilon\int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})\,d\xi = o(t;\varepsilon\delta\mu), \dot{x}_0(\xi-\tau_{i0}) = \dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0}),$$

აქედან გამომდინარე,

$$w_{01}^3 = -\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \left[\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\, f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi \right] \delta\tau_i + o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{3.13}$$

(3.12) და (3.13) გამოსახულებებზე დაყრდნობით, მივიღებთ

$$w_{01} = -\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \left[\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\, f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi \right] \delta\tau_i + o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

ახლა გარდავქმნათ w_{02}. გვაქვს

$$w_{02} = \int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\{f[\xi;x_0+\Delta x] - f[\xi]\}$$

$$- \int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t) f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{10})\, d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

აქედან, თუ $\xi \in [t_0+\tau_1, t_{00}+\tau_{10}]$, მაშინ

$$|\Delta x(\xi)| \le O(\varepsilon\delta\mu), \qquad |\Delta x(\xi-\tau_i)| = \varepsilon|\delta\varphi(\xi-\tau_i)|, \qquad x_0(\xi-\tau_i) = \varphi_0(\xi-\tau_i), \qquad i=\overline{2,s}$$

და

$$x_0(\xi-\tau_1) + \Delta x(\xi-\tau_1) = x(\xi-\tau_1;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) = y(\xi-\tau_1;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$$

$$= y_0(\xi-\tau_1) + \Delta y(\xi-\tau_1;\varepsilon\delta\mu),$$

აქედან გამომდინარე,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\xi, x_0(\xi)+\Delta x(\xi), x_0(\xi-\tau_1)+\Delta x(\xi-\tau_1), \dots, x_0(\xi-\tau_s)+\Delta x(\xi-\tau_s))$$

$$= \lim_{\xi\to t_{00}+\tau_{10}-}\big(\xi, x_0(\xi), y_0(\xi-\tau_{10}), x_0(\xi-\tau_{10}), \dots, x_0(\xi-\tau_{s0})\big) = w_{11}^0,$$

$$\lim_{\xi\to t_{00}+\tau_{10}-}\big(\xi, x_0(\xi), x_0(\xi-\tau_{10}), \dots, x_0(\xi-\tau_{s0})\big) = w_{21}^0,$$

ე.ი.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{\xi\in[t_0+\tau_1, t_{00}+\tau_{10}]} |f[\xi;x_0+\Delta x] - f[\xi] - f_1| = 0.$$

ამასთან, ფუნქცია $Y(\xi;t)$ უწყვეტია სიმრავლეზე $[t_{00}, t_{00}+\tau_{10}] \times [t_{00}-\tau_2, t_{10}+\delta_2] \subset \Pi$.

ამდენად,

$$\int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\{f[\xi;x_0+\Delta x]-f[\xi]\}d\xi$$

$$=\int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)f_1 d\xi+\int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\{f[\xi;x_0+\Delta x]-f[\xi]-f_1\}d\xi$$

$$-\varepsilon Y(t_{00}+\tau_{10};t)f_1(\delta t_0+\delta\tau_1)+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

გამოსახულება $-\varepsilon Y(t_{00}+\tau_{10};t)f_1(\delta t_0+\delta\tau_1)+o(t;\varepsilon\delta\mu)$ არის წყვეტილობის ეფექტი.

შესაბამისად,

$$w_0=-\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\,f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\right]\delta\tau_i$$

$$-\varepsilon Y(t_{00}+\tau_{10};t)f_1(\delta t_0+\delta\tau_1)$$

$$-\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{10})\,d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{3.14}$$

ვთქვათ, $\rho_{1,1}=t_0+\tau_1$ კვლავ და $t_0+\tau_1>t_{00}+\tau_{10}$, მაშინ გვაქვს

$$w_0=\widehat{w}_{01}+\widehat{w}_{02},$$

სადაც

$$\widehat{w}_{01}=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_{10}} \theta_2(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,\quad \widehat{w}_{02}=\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\{f[\xi;x_0+\Delta x]-f[\xi]\}\,d\xi$$

$$-\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\left[f_x[\xi]\Delta x(\xi)+\sum_{i=2}^{s}f_{x_i}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})\right]d\xi$$

$$-\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{10})\,d\xi-\varepsilon\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)\,d\xi.$$

ამ შემთხვევაში (3.14) ფორმულა სამართლიანია და შესაძლებელია დამტკიცდეს ზემოთ მოყვანილი სქემის მიხედვით.

ვთქვათ, $\rho_{1,1} = t_{00} + \tau_{10}$, ე.ი. $t_{00} + \tau_{10} < t_0 + \tau_i$. ამ შემთხვევაში ანალოგიური გარდაქმნებით შესაძლებელია დამტკიცდეს ფორმულა

$$w_0(t;\varepsilon\delta\mu) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \left[\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\, f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi - \tau_{i0}) d\xi \right] \delta\tau_i$$

$$- \int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t) f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi - \tau_{10})\, d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu)$$

წყვეტილობის ეფექტის $-\varepsilon Y(t_{00} + \tau_{10}; t) f_1(\delta t_0 + \delta\tau_1)$ გარეშე. შევნიშნოთ, რომ ეს ეფექტები ჩნდება $w_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ შესაკრების გარდაქმნისას. $R_1(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)$-თვის $w_i(t;\varepsilon\delta\mu), i = \overline{1,s}$-ის გარდაქმნებით მივიღებთ ფორმულას

$$R_1(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \left[\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi - \tau_{i0})\, d\xi \right] \delta\tau_i$$

$$- \sum_{i=1}^{s} \int_{t_0+\tau_{i0}}^{t_{00}+\tau_{i0}} Y(\xi;t) f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi - \tau_{i0})\, d\xi - \varepsilon \sum_{i=1}^{s} Y(t_{00} + \tau_{i0}) f_i(\delta t_0 + \delta\tau_i)$$

$$+ o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{3.15}$$

(3.5)-დან (3.7), (3.8) და (3.15) გამოსახულებებით, მივიღებთ (1.3)-ს, სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$-ს აქვს (1.4) ფორმა.

□

4. თეორემა 1.2 –ის დამტკიცება

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ $\delta\mu \in V^+$, ე.ი. $t_{00} < t_0$, აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t), & \text{როცა } t \in [\hat{\tau}, t_{00}) \\ \varphi(t) - y_0(t), & \text{როცა } t \in [t_{00}, t_0) \\ \Delta y(t), & \text{როცა } t \in [[t_0, t_{10} + \delta_1] \end{cases}$$

ლემა 2.4-ის თანახმად, გვაქვს

$$\Delta x(t_0) = \varepsilon[\delta x_0 - f^+\delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{4.1}$$

ფუნქცია $\Delta x(t)$ აკმაყოფილებს (3.3) განტოლებას ინტერვალზე $t \in [t_0, t_{10} + \delta_1]$.

კოშის ფორმულის გამოყენებით (3.3)-განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით

$$\Delta x(t) = Y(t_0; t)\Delta x(t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} Y(\xi; t) f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi + \sum_{p=0}^{1} R_p, \tag{4.2}$$

სადაც $R_p = R_p(t; t_0, \varepsilon\delta\mu)$, (იხ (3.6)). ვთქვათ, $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ რიცხვები იმდენად მცირეა, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს: $t_0 + \tau_i < t_{10} - \delta_2,\ i = \overline{1, s},\ t_{00} + \tau_{s0} < t_{10} - \delta_2$. $Y(\xi; t)$ ფუნქცია უწყვეტია სიმრავლეზე $[t_{00}, t_{00} + \tau_{s0}] \times [t_{10} - \delta_2, t_{10} + \delta_2] \subset \Pi$. ამდენად $\Delta \mathrm{x}(\mathrm{t}_0)$ ფორმულა ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$Y(t_0; t)\Delta x(t_0) = \varepsilon Y(t_0; t)[\delta x_0 - f^+\delta t_0] + o(t; \varepsilon\delta\mu) \tag{4.3}$$

(იხ. (4.1)).

ახლა გარდავქმნათ $R_0(t; t_0, \varepsilon\delta\mu)$. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$R_0 = \varepsilon \sum_{i=1}^{s} \int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} Y(\xi + \tau_{i0}; t) f_{x_i}[\xi + \tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_0+\tau_{i0}} Y(\xi; t) f_{x_i}[\xi]\Delta x(\xi - \tau_{i0})d\xi \ + o(t; \varepsilon\delta\mu) \tag{4.4}$$

$$R_1 = -\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \left[\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi; t) f_{x_i}[\xi] \dot{x}_0(\xi - \tau_{i0})\, d\xi \right] \delta\tau_i$$

$$-\sum_{i=1}^{s} \int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_0+\tau_{i0}} Y(\xi; t) f_{x_1}[\xi] \Delta x(\xi - \tau_{i0}) d\xi - \varepsilon \sum_{i=1}^{s} Y(t_{00} + \tau_{i0}) f_i (\delta t_0 + \delta\tau_i)$$

$$+o(t; \varepsilon\delta\mu) \tag{4.5}$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ

$$\varepsilon \int_{t_0}^{t} Y(\xi; t) f_u [\xi] \delta u(\xi) d\xi = \varepsilon \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi; t) f_u [\xi] \delta u(\xi) d\xi + o(t; \varepsilon\delta\mu) \tag{4.6}$$

და თუ გავითვალისწინებთ (4.2)–ში (4.3)–(4.6) წარმოდგენებს, მივიღებთ (1.3)–ს, სადაც

$$\delta x(t; \delta\mu) = -Y(t_{00}; t) f^{+} \delta t_0 + \beta(t; \delta\mu).$$

□

დ ა ს კ ვ ნ ა

დაგვიანებულ არგუმენტიანი არაწრფივი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის წყვეტილი საწყისი პირობით დამტკიცებულია ამონახსნის ვარიაციის ლოკალური ფორმულები საწყისი მონაცემების ვარიაციის ახალი კლასის მიმართ, როცა საწყისი მომენტი განიცდის შეშფოთებას ან მარცხნიდან ან მარჯვნიდან ან ორივე მხრიდან. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი ვექტორის, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა. ვარი-აციის ფორმულებში გამოვლენილია წყვეტილი საწყისი პირობის, საწყისი მომენტისა და დაგვიანების პარამეტრების შეშფოთების ეფექტები. გარდა ამისა, გამოთვლილია ამონახსნის ნაზრდის მნიშვნელობა საწყის მომენტში და დადგენილია ამონახსნის ნაზრდის რიგი მცირე პარამეტრის მიმართ, რომლებიც არსებითად გამოიყენება ამონახსნის ვარიაციის ფორმულების დამტკიცებისას. მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებული იქნეს საწყისი მონაცემების ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების მისაღებად, შეშფოთებული კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის მოსაძებნად და დიფერენციალური მოდელების სენსიტიურ ანალიზში.

ლიტერატურა

1. T. Tadumadze, Variation formulas of solutions for functional differential equations with several constant delays and their applications in optimal control problems, *Mem. Diff. Eq. Math. Phys.* **70** (2017), 7-97 .
2. Gamkrelidze R.V., *Principle of optimal control theory,* Math. Concepts Methods Sci. Eng. 7, Plenum press, New York-London, 1978.
3. T. Tadumadze, Local representations for the variation formulas of solutions od delay differential equation, *Mem. Diff. Eq. Math. Phys.* **21** (2000), 138-141.
4. Tadumadze T., Alkhazishvili L., Formulas of variation of solution for non-linear controlled delay differential equation with continuous initial condition. *Mem. Diff. Eq. Math. Phys.* 31 (2004), 83-97 .
5. Tadumadze T., Nachaoui A., Variation formulas of solution for a controlled delay functional-differential equation considering delay perturbation. *TWMS J. App. Eng. Math.* V.1, N.1, 2011, 34-44.
6. Tadumadze T., Variation formulas of solution for a delay differential equation with taking into account delay perturbation and the continuous initial condition. *Georgian Math. J.* v.18 (2011), No. 2, 348-364.