ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი ადეიშვილი

ამონახსნის უწყვეტობა საწყისი მონაცემების მიმართ ერთი კლასის სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის განაწილებული დაგვიანებით თანაბრად მართვის ფუნქციების მიმართ

სამაგისტრო პროგრამა: მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამაგისტრო ნაშრომის ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე

ფიზიკა მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

თბილისი 2018

სარჩევი

ანოტაცია

სამართი არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის, განაწილე-ბული დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში, დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის საწყის მონაცემებზე უწყვეტად დამოკიდებულების შესახებ თანაბრად მართვის ფუნქციების მიმართ. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, დაგვიანების პარამეტრის, საწყისი ფუნქციისა და საწყისი ვექტორის ერთობლიობა. გარდა ამისა, გამოკვლეულია ოპტიმალური ამოცანის ამონახსნის (ოპტიმალური მართვის) არსებობის სენსიტიურობის საკითხი საწყისი მონაცემების შეშფოთებების მიმართ. სახელდობრ, დამტკიცებულია რომ თუ საწყის ოპტიმალურ ამოცანას აქვს ამონახსნი, მაშინ ამონახსნი ექნება შეშფოთებულ ამოცანასაც.

Summary

For the controlled nonlinear differential equation with distributed delay in the phase coordinates is proved theorem about continuous dependence of solution on initial data uniformly with respect to control functions. Under the initial data we mean the collection of the initial moment, delay parameter, initial function and initial vector. Perturbations of the initial data are small in a standard norm. Moreover, sensitivity of the existence of a solution (optimal control) for an optimal problem is investigated with respect to perturbations of initial data. Namely, is proved that if the initial optimal problem has a solution then perturbed problem has solution also.

შესავალი

უწყვეტი სისტემების მდგომარეობა დროის მოცემულ მომენტში, როგორც წესი, დამოკიდებულია სისტემის ყოფაქცევაზე წარსულში. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სისტემის ევოლუციაზე გავლენას ახდენენ სისტემის მემკვიდრეობითობის ფაქტორი. მაგალითად, იმუნური პასუხის უმარტივესი დიფერენციალურ მოდელში [1]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = p_1 x_1(t) - p_2 x_1(t) x_3(t) - b_1 u_1, \\ \dot{x}_2(t) = p_3 \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} x_1(s) x_3(s) ds - p_4 x_2(t) + b_2 u_2, \\ \dot{x}_3(t) = p_5 x_2(t) - p_6 x_3(t) - p_7 x_1(t) x_3(t) + b_3 u_3 \end{cases} \qquad (1)$$

მემკვიდრეობითობის ფაქტორს განსაზღვრავს მეორე განტოლების პირველი შესაკრები და იგი განაწილებულია $[t-\tau, t]$ მონაკვეთზე . აქ $x_1(t)$ არის ვირუსების კონცენტრაცია t მომენტში; $x_2(t)$ არის პლაზმის უჯრედების კონცენტრაცია (ანტისხეულების წარმომქნელები); $x_3(t)$ ანტისხეულების კონცენტრაცია, ისინი ებრძვიან ვრუსებს; u_1 მართვა ხელს უწყობს ვირუსების განადგურებას; u_2 აძლიერებს პლაზმის უჯრედებს; u_3 აძლიერებს ანტისხეულებს.

წარმოდგენილ ნაშრომში სამართი ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლებისთვის

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_{t-\tau}^{t} \sigma\big(s, x(s)\big) ds, u(t)\right) \qquad (2)$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [\hat{\tau}, t_0),\ \ x(t_0) = x_0$$

დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის საწყის მონაცემებზე უწყვეტად დამოკიდებულების შესახებ თანაბრად $u \in \Omega$ მართვის ფუნქციების მიმართ, სადაც Ω არის ზომად $u(t)$ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც მნიშვნელობებს იღებენ $U \subset R^r$ კომპაქტში. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის t_0, დაგვიანების პარამეტრის $\tau > 0$, საწყისი ფუნქციისა $\varphi(t)$ და საწყისი x_0 ვექტორის ერთობლიობა. წყვეტილი საწყისი პირობა ნიშნავს, რომ საწყის t_0 მომენტში საწყისი $\varphi(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, საზოგადოდ, არ ემთხვევა

საწყის x_0 ვექტორს ცხადია , რომ (1) სისტემა წარმოადგენ (2) განტოლების კერძო შემთხვევას.

ამონახსნის საწყის მონაცემებზე უწყვეტად დამოკიდებულების საკითხი (კოშის ამოცანის კორექტულობა) დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის კლასიკური პრობლემაა, სხვადასხვა კლასის ჩვეულებრივი და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისათვის, მართვის ფუნქციების გარეშე, გამოკვლეული იყო [2-5]-ში. მოცემულ ნაშრომში სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება რომ აქ ამონახსნის უწყვეტობა დამტკიცებულია არაწრფივი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის. საწყისი მონაცემების შეშფოთება მცირეა სტანდარტული ნორმის აზრით. თეორემები ამონახსნის უწყვეტობის შესახებ გამოიყენება დიფერენციალური მოდელებისა და ოპტიმალური მართვის ამოცანების სენსიტიურ ანალიზში. აღნიშნულის საილუსტრაციოდ , ნაშრომში დამტკიცებულია თეორემა, რომელიც გვიჩვენებს რომ თუ თავდაპირველი ოპტიმალური ამოცანისთვის არსებობს ოპტიმალური მართვა, მაშინ საწყისი მონაცემების შეშფოთებით მიღებული ოპტიმალური ამოცანისთვისაც იარსებებს ოპტიმალური მართვა.

ნაშრომში მიღებული შედეგები მოხსენებულ იქნა: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მეექვსე ყოველწლიურ კონფერენციაზე, ასევე თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის XXXII საერთაშორისო გაფართოებულ სხდომებზე. თეზისების ელექტრონული ვერსია გამოქვეყნებულია ვებ-გვერდებზე: http://conference.ens-2018.tsu.ge/lecture/view/880; http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2018/.

ნაშრომი შედგება ხუთი პარაგრაფისგან. პირველ პარაგრაფში მოყვანილია ძირითადი შედეგები,ხოლო მეორე პარაგრაფში - დამხმარე დებულებები ლემებისა და თეორემების სახით. მესამე პარაგრაფში ოპერატორის შემცველი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის [3]-ში მოცემული სქემის მიხედვით დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის საწყის მონაცემებზე უწყვეტად დამოკიდებულობის შესახებ. ეს თეორემა ფუნდამენტურ როლს თამაშობს ძირითადი თეორემა 1.1-ის დამტკიცებაში (იხ. პარაგრაფი 4). მეხუთე პარაგრაფში, თეორემა 1.1-ის გამოყენებით დამტკიცებულია თეორემა 1.2. ნაშრომის ბოლოს მოყვანილია დასკვნა და გამოყენებული ლიტერატურა.

1. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ, $\mathrm{I} = [a, b]$ არის სასრული ინტერვალი, R^n არის $x = (x^1, \dots, x^n)^T$ წერტილთა n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე, ნორმით

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \,,$$

სადაც T აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას; დავუშვათ, $O \subset R^n$ არის ღია სიმრავლეა, ხოლო, $U \subset R^r$ კომპაქტური - სიმრავლე. ვთქვათ, n-განზომილებიანი

$$f(t, x_1,\ x_2, u), (t, x_1,\ x_2, u) \in\ I \times 0 \times R^n \times U$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) ყოველი ფიქსირებული $(x_1,\ x_2, u) \in 0 \times R^n \times U$ ფუნქცია f ზომადია t-ს მიმართ I-ზე;

ბ) თითქმის ყველა $t \in I$-სთვის ფუნქცია f უწყვეტია $O \times R^n\ \times U$ -ზე; $\forall\ \mathrm{K} \subset O$ კომპაქტის-თვის არსებობს ფუნქციები $m_K(t),\ L_K(t) \in\ L_1(I, [0, \infty),)$ ისეთი რომ თითქმის ყველა $t \in I$ შესრულებულია უტოლობები:

$$\left|f\left(t, x_1,\ x_2, u\right)\right| \le m_K(t), \forall\left(x_1,\ x_2, u\right) \in K \times\ R^n \times U;$$

$$|f(t, x_1,\ x_2, u) - f(t, y_1,\ y_2, u)| \le L_K(t) \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|, \forall (x_1,\ y_1) \in K^2, \forall (x_2,\ y_2) \in R^n \times\ R^n, \forall u \in U.$$

ვთქვათ, $0 < \theta_1 < \theta_2$ მოცემული რიცხვებია, $I_1\ = [\hat{\tau}, b]$, $\hat{\tau} = a - \theta_2$; $I_2 = [\theta_1, \theta_2]$ ხოლო $C(I_1)$ არის უწყვეტი $\varphi(t) \in R^n, t \in I_1$ ფუნქციების სივრცე ნორმით $\|\varphi\|_{I_1} = \sup\{|\varphi(t)|; t \in I_1\}$. $\Phi = \{\varphi \in C(I_1) \colon \varphi(t) \in O, t \in I_1\}$ აღნიშნავს საწყის ფუნქციათა სიმრავლეს.

ყოველ $\mu = \left(t_0,\ \tau, x_{0,}\varphi\right) \epsilon\ \Lambda = [\mathrm{a}, \mathrm{b}) \times I_2 \times O\ \times\ \Phi$ ელემენტს და $u \in \Omega$ მართვას შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება განაწილებული დაგვიანებით $[t - \tau, t]$ მონაკვეთზე

$$\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),\int_{t-\tau}^{t}\sigma\big(s,x(s)\big)ds,u(t)\right)\qquad(1.1)$$

საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\ \ t\in[\hat{\tau},t_0),\ \ x(t_0)=x_0\qquad(1.2)$$

სადაც $\sigma(s,x_1),(s,x_1)\in I_1\times O$ არის მოცემული ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: ყოველი ფიქსირებული $x_1\in O$-სთვის ფუნქცია $\sigma(\cdot,x_1):I_1\to R^n$ ზომადია; ყოველი $\mathrm{K}\subset O$ კომპაქტური სიმრავლისთვის არსებობს ფუნქციები $\widehat{m}_K(s)$, $\widehat{L}_K(s)\epsilon L_1(I_1,[0,\infty))$, ისეთი რომ თითქმის ყველა $s\in I_1$-სთვის შესრულებულია უტოლობები:

$$|\sigma(s,x_1)|\le\widehat{m}_K(s),\ \ |\sigma(s,x_1)-\sigma(s,y_1)|\le\widehat{L}_K(s)|x_1-y_1|,\forall\big(x_1,\,y_1\big)\in K^2.$$

$(1.1)-(1.2)$ ეწოდება კოშის ამოცანა განაწილებული დაგვიანებით და წყვეტილი საწყისი პირობით.

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ, $\mu=\big(t_0,\,\tau,x_{0,}\varphi\big)\in\,\Lambda$ მოცემული ელემენტია. $x(t)=x(t;\mu,u)\in O$, $t\in[\hat{\tau},\,t_1]$, $t_1\in(t_0,b)$, ფუნქციას ეწოდება $(1.1)-(1.2)$ ამოცანის ამონახსნი ან μ ელემენტისა და $u\in\Omega$ მართვის შესაბამისი ამონახსნი განმარტებული $[\hat{\tau},\,t_1]$ ინტერვალზე, თუ $x(t)$ აკმაყოფილებს (1.2) პირობას $[\hat{\tau},\,t_0]$ -ზე, ხოლო $[t_0,t_1]$ –ზე არის აბსოლუტურად უწყვეტი და თითქმის ყველა $t\in[t_0,t_1]$ –სთვის აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას.

ცნობილია, რომ ყოველი $\mu\in\Lambda$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი განმარტე-ბული $[\hat{\tau},\,t_0+\delta]$ მონაკვეთზე, სადაც $\delta>0$ რაიმე მცირე რიცხვია (ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის ლოკალური თეორემა [6])

განსაზღვრება 1.2. $\mu\,\epsilon\,\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნთა ოჯახი ეწოდება $x(t;\mu,u),\forall u\in\Omega$ ამონახსნების ერთობლიობას და აღინიშნება $X(\mu)$ ე.ი.

$$X(\mu)=\big\{x(t;\mu,u):u\ \in\ \Omega\big\}.$$

განსაზღვრება 1.3. ვიტყვით, რომ $X(\mu)$ ოჯახი განმარტებულია $[\hat{\tau},\,t_1]$ ინტერვალზე, თუ $\forall u\in\Omega$ –სთვის $x(t;\mu,u)$ ამონახსნი განმარტებულია $[\hat{\tau},\,t_1]$ ინტერვალზე.

ვთქვათ $\mu_0 = (t_{00},\, \tau_0, x_{00,}\varphi_0) \in \ \Lambda$ ფიქსირებული ელემენტია. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x_0(t;u) = x(t;\mu_0,u), X_0 = \{x_0(t;u) : u \in \Omega\};\ B(t_{00};\delta) = \{t_0 \epsilon\, I\colon\ |t_0 - t_{00}| < \delta\};$$

$$B(\tau_0;\delta) = \{\tau\, \epsilon\, I_2\colon\ |\tau_0 - \tau| < \delta\}; B(x_{00};\delta) = \{x_0 \epsilon\ R_x^n : |x_0 - x_{00}| < \delta\};$$

$$B(\varphi_0;\delta) = \{\varphi \epsilon\, \Phi : \|\varphi - \varphi_0\| < \delta\},$$

სადაც $\delta > 0$ რაიმე მცირე რიცხვია.

ცხადია $\mu_0 = (t_{00},\, \tau_0, x_{00,}\varphi_0) \in \ \Lambda$ ელემენტს შეესაბამება ამოცანა

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int\limits_{t-\tau_0}^{t} \sigma(s, x(s))ds, u(t)\right), \qquad (1.3)$$

$$x(t) = \varphi_0(t),\ \ t \in [\hat{\tau}, t_{00}),\ \ x(t_{00}) = x_{00}. \qquad (1.4)$$

(1.3)-(1.4) ამოცანას ეწოდება საწყისი (თავდაპირველი) კოშის ამოცანა, ხოლო (1.1)-(1.2) ამოცანას ეწოდება (1.3)-(1.4) ამოცანის საწყისი მონაცემების ცვლილებით მიღებული შეშფოთებული კოშის ამოცანა.

თეორემა 1.1. ვთქვათ, $\mu_0 = (t_{00}, \tau_0, x_{00}, \varphi_0)$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნთა ოჯახი X_0 განმარტებულია $[\hat{\tau},\, t_{10}]$-ზე, სადაც $t_{10} \in (t_{00}, b)$ და ვთქვათ, არსებობს ისეთი $K_0 \subset O$ კომპაქტი, რომ

$$x_0(t;u) \epsilon\, K_0,\ \ t \epsilon [t_{00},\, t_{10}], \forall u \in \Omega.$$

შემდეგ, ვთქვათ, $K_1 \subset O$ არის კომპაქტი, რომელიც შეიცავს $\varphi_0(I_1) \cup K_0$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს, მაშინ სამართლიანია შემდეგი მტკიცებულება:

1) $\exists\, \delta_i > 0,\ i = 0,\ 1.$ ისეთი, რომ ყოველ

$$\mu\, \epsilon\, \mathrm{V}(\mu_0;\delta_0) = B(t_{00};\delta_0) \times B(\tau_0;\delta_0) \times B(x_{00};\delta_0) \times B(\varphi_0;\delta_0)$$

ელემენტს შეესაბამება ამონახსნთა სიმრავლე $X(\mu)$ განმარტებული $[\hat{\tau},\, t_{10} + \delta_1] \subset I_{1,}$ გარდა ამისა,

$$x(t;\mu,u)\epsilon K_1,\ t\in\ [\hat{\tau},\ t_{10}+\delta_1], u\,\epsilon\,\Omega.$$

2) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2=\delta_2(\varepsilon)\in\left(0,\ \delta_0\right)$ ისეთი, რომ $\forall\mu\ \in\ V(\mu_0;\delta_2)$ ელემენტისთვის და $u(t)\in\Omega$ მართვისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|x(t;\mu,u)-x(t;\mu_0,u)|\le\varepsilon, t\epsilon[\theta,\ t_{10}+\delta_1],\ \ \theta=max\{t_0,\ t_{00}\}.$$

3) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_3=\delta_3(\varepsilon)\epsilon\left(0,\ \delta_0\right)$ ისეთი, რომ $\forall\mu\,\epsilon\,V(\mu_0;\delta_3)$ ელემენტისთვის და $u(t)\epsilon\Omega$ მართვისთვის

$$\int_{\hat{\tau}}^{t_{10}+\delta_1}|x(t;\mu,u)-x(t;\mu_0,u)|dt\le\varepsilon.$$

ბუნებრივია $X(\mu_0)$ ვუწოდოთ X_0 ამონახსნთა ოჯახის გაგრძელება.

ახლა განვიხილოთ $\mu_0=\left(t_{00},\ \tau_0,x_{00,}\varphi_0\right)\in\ \Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ოპტიმალური ამოცანა

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),\displaystyle\int_{t-\tau_0}^{t}\sigma\big(s,x(s)\big)ds,u(t)\right),t\in[t_{00},t_{10}],\\ x(t)=\varphi_0(t),\ t\in[\hat{\tau},t_{00}),\ \ x(t_{00})=x_{00},\\ J\big(u(\cdot)\big)=\displaystyle\int_{t_{00}}^{t_{10}}f_0\left(t,x(t),\int_{t-\tau_0}^{t}\sigma\big(s,x(s)\big)ds,u(t)\right)dt\to min\end{cases}$$

სადაც $t_{10}\in(t_{00},b]$ ფიქსირებული საბოლოო მომენტია, $x(t)=x(t,\mu_0,u)$, ხოლო სკალარული ფუნქცია $f_0(t,x_1,x_2,u)$ აკმაყოფილებს იგივე პირობებს რასაც აკმაყოფილებდა f ფუნქცია.

განსაზღვრება 1.4. (დასაშვები მართვა). $u\in\Omega$ მართვას ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი $x(t)$ არსებობს $[\hat{\tau},t_{10}]$ ინტერვალზე.

დასაშვებ მართვების სიმრავლე აღვნიშნოთ Ω_0-ით.

განსაზღვრება 1.5. (ოპტიმალური მართვა). $u_0\in\Omega$ მართვას ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $u\in\Omega$-სთვის

$$J\big(u_0(\cdot)\big) \le J\big(u(\cdot)\big).$$

თეორემა 1.2. ვთქვათ, შესრულებულია შემდეგი პირობები:

4) $\mu_0 = \left(t_{00},\, \tau_0, x_{00,}\varphi_0\right) \in \varLambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნთა ოჯახი X_0 განმარტებულია $[\hat{\tau}, t_{10}]$-ზე და ვთქვათ არსებობს ისეთი კომპაქტი $K_0 \subset O$ რომ

$$x_0(t,u) \in K_0\ ,\ t \in [t_{00}, t_{10}], \forall u \in \Omega;$$

5) ყოველი ფიქსირებული $\left(t, x_1,\, x_2\right) \in\, I \times 0 \times R^n$-სთვის სიმრავლე

$$P\big(t; x_1,\, x_2\big) = \{F\big(t, x_1,\, x_2, u\big) \colon u \in U\} \subset R^{1+n},$$

სადაც $F = (f_0, f)^T$, ამოზნექილია.

მაშინ μ_0-ის შესაბამისი ოპტიმალური ამოცანისთვის არსებობს ოპტიმალური მართვა [3]. გარდა ამისა, $\exists \varepsilon > 0$ რიცხვი, ისეთი რომ $\forall \mu \,\epsilon\, \mathbb{V}(\mu_0; \varepsilon)$ ელემენტის შესაბამისი შეშფოთე-ბული ოპტიმალური ამოცანისთვის

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} \sigma\big(s, x(s)\big)ds, u(t)\right), t \in [t_0, t_{10}] \\ x(t) = \varphi(t),\ t \in [\hat{\tau}, t_0],\ \ x(t_0) = x_0 \\ J\big(u(\cdot)\big) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_{10}} f_0\left(t, x(t), \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} \sigma\big(s, x(s)\big)ds, u(t)\right)dt \to min \end{cases}$$

არსებობს ოპტიმალური მართვა $u_0(t; \mu, \varepsilon)$.

ზოგიერთი კომენტარი. ვთქვათ $O = \{x \in R^n \colon |x| < M, M > 0\}, |x_{00}| < \frac{M}{3}$,

$$|f(t, x_1, x_2, u)| < \frac{M}{3(b-a)}\ , (t, x_1, x_2, u) \in I \times O \times R^n \times U.$$

მაშინ K_0 კომპაქტის როლში შეიძლება ავიღოთ სიმრავლე

$$\left\{x \in O: |x| \leq \frac{2M}{3}\right\}.$$

მართლაც,

$$|x_0(t;u)| = \left| x_{00} + \int_{t_{00}}^{t} f\left(\xi, x(\xi), \int_{\xi-\tau}^{\xi} \sigma\big(s, x(s)\big)ds, u(\xi)\right) d\xi \right|$$

$$\leq |x_{00}| + \int_{a}^{b} \left| f\left(\xi, x(\xi), \int_{\xi-\tau}^{\xi} \sigma\big(s, x(s)\big)ds, u(\xi)\right)\right| d\xi \leq \frac{2M}{3} \,.$$

ვთქვათ U ამოზნექილი სიმრავლეა, ხოლო

$$F(t, x_1, x_2, u) = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2,)u$$

მაშინ სიმრავლე $P(t, x_1, x_2,)$ ამოზნექილია.

მართლაც, ყოველი ფიქსირებული $(t, x_1, x_2) \in I \times O \times R^n$ ასახვა $F(t, x_1, x_2, u)$ წრფივია $u \in U$ ცვლადის მიმართ, ამიტომ ამოზნექილი U სიმრავლის სახე $P(t, x_1, x_2,)$ იქნებაამოზნექილია.

2. დამხმარე დებულებები

ვთქვათ X მეტრიკული სივრცეა. ρ არის მეტრიკა X-ზე. განვიხილოთ $A(x,\nu,p)$ ასახვათა ოჯახი,

$$A(\cdot\,;\nu,p): X \to X,\ (\nu,p) \in \Sigma \times P, \quad (2.1)$$

სადაც Σ ტოპოლოგიური სივრცეა, P - ნებისმიერი სიმრავლე.

განსაზღვრება 2.1. $A(x,\nu,p)$ ასახვათა ოჯახს ეწოდება თანაბრად კუმშვადი, თუ $\exists\alpha \in (0,1)$, დამოუკიდებელი $(\nu,p) \in \Sigma \times P$-ზე, ისეთი რომ (2.1) არის კუმშვითი ასახვა, კუმშვის α კოეფიციენტით. ე.ი.

$$\rho\big(A(x,\nu,p), A(y,\nu,p)\big) \le \alpha\rho(x,y).\ \forall(x,y)\epsilon X^2, \forall(\nu,p)\epsilon\ \Sigma \times P\ .$$

(2.1) ასახვის k-ურ იტერაციას აქვს სახე

$$A^k(x;\nu,p) = A\big(A^{k-1}(x;\nu,p);\nu,p\big), k = 1,2, \dots , A^0(x;\nu,p) = x.$$

ცხადია,

$$A^k(\cdot\,;\nu,p): X \to X,\ (\nu,p) \in \Sigma \times P \quad (2.2)$$

თეორემა 2.1 ([2]). ვთქვათ X სრული მეტრიკული სივრცეა. თუ რომელიმე იტერაციათა ოჯახი (2.2) თანაბრად კუმშვადია, მაშინ (2.1) ასახვას ყოველი $(\nu,p) \in \Sigma \times P$-სთვის აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი $x_\nu(p)$

$$A(x_\nu(p)\,,\nu,p) = x_\nu(p).$$

ლემა 2.1. ვთქვათ იტერაციათა ოჯახი (2.2) არის თანაბრად კუმშვადი ხოლო $A^k(x_{\hat{\nu}}(p);\nu,p)$, $\hat{\nu} \in \Sigma$ უწყვეტია $\nu = \hat{\nu}$ წერტილში თანაბრად $p \in P$-ს მიმართ. მაშინ $x_\nu(p)$ უწყვეტია $\nu = \hat{\nu}$ წერტილში თანაბრად $p \in P$-ს მიმართ.

დამტკიცება. სამკუთხედის აქსიომის გამოყენებით დავწეროთ შემდეგი ცხადი უტოლობები

$$\rho\left(x_{\hat{\nu}}(p), x_\nu(p)\right) = \rho\left(A^k(x_{\hat{\nu}}(p);\ \hat{\nu}, p), A^k\ (x_\nu(p); \nu, p)\right) \le \rho\left(A^k(x_{\hat{\nu}}(p);\ \hat{\nu}, p), A^k(x_{\hat{\nu}}(p);\ \nu, p)\right)$$
$$+ \rho\left(A^k(x_{\hat{\nu}}(p);\ \nu, p), A^k(x_\nu(p); \nu, p)\right) \le \alpha\rho\left(x_{\hat{\nu}}(p); x_\nu(p)\right) + \rho\left(A^k(x_{\hat{\nu}}(p); \hat{\nu}, p), A^k\ (x_{\hat{\nu}}(p); \nu, p)\right).$$

აქედან მივიღებთ

$$\rho\left(x_{\hat{\nu}}(p), x_\nu(p)\right) \le \frac{1}{1-\alpha}\, \rho\left(A^k(x_{\hat{\nu}}(p), ; \hat{\nu}, p), A^k\ (x_{\hat{\nu}}(p); \nu, p)\right).$$

პირობის ძალით ასახვა $A^k(x_{\hat{\nu}}(p);\ \nu, p)$ უწყვეტია Σ სივრცის ტოპოლოგიაში $\nu = \hat{\nu}$ წერტილზე თანაბრად $p \in P$ მიმართ. ამრიგად, $\forall\varepsilon > 0$ არსებობს $\hat{\nu}$ წერტილის ისეთი მიდამო $V_{\hat{\nu}} \subset \Sigma$, რომ

$$\rho\left(A^k(x_{\hat{\nu}}(p);\ \hat{\nu}, p), A^k\ (x_\nu(p); \nu, p)\right) \le \varepsilon(1-\alpha), \forall(\hat{\nu}, p) \in V_{\hat{\nu}} \times P.$$

მაშასადამე,

$$\rho\left(x_{\hat{\nu}}(p), x_\nu(p)\right) \le \varepsilon, \forall(\hat{\nu}, p) \in V_{\hat{\nu}} \times P$$

ლემა 2.1 დამტკიცებულია.

ლემა 2.2. ვთქვათ, K_1 და K_0 კომპაქტებია O ღია სიმრავლიდან, ამასთან, $K_0 \subset intK_1$. მაშინ არსებობს ისეთი კომპაქტი $Q \subset O$ და უწყვეტად დიფერენცირებადი სკალარული ფუნქცია $\chi(x_1), x_1 \in R^n$, რომ $K_0 \subset\ O \subset K_1$ და

$$\chi(x_1) = \begin{cases} 1, x_1 \in Q \\ 0, x_1 \notin\ {K_1}^2 \end{cases} \qquad (2.3)$$

ლემა 2.3. ფუნქცია

$$g(t, x_1, x_2, u) = \begin{cases} \chi(x_1) f(t, x_1, x_2, u), t \in I, x_1 \in Q, x_2 \in R^n, \\ 0, t \in I, x_1 \notin K_1, x_2 \in R^n. \end{cases}$$

თითქმის ყველა $t \in I$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$|g(t, x_1, x_2, u)| \le m_{K_1}(t), \forall(x_1, x_2, u) \in R^n \times\ R^n \times U; \qquad (2.4)$$

$$|g(t, x_1, x_2, u) - g(t, y_1,\ y_2, u)| \le L(t) \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|, (x_i, y_i) \in R^n \times R^n, u \in U, \qquad (2.5)$$

სადაც

$$L(t) = L_{K_1}(t) + \alpha_0 m_{K_1}(t), \alpha_0 = \sup\left\{\left|\chi_{x_1}(x_1)\right| : \ x_1 \in R^n\right\}$$

დამტკიცება. (2.4) გამომდინარეობს g ფუნქციის განმარტებიდან. ვთქვათ, $x_1 \in \ K_1$ და $y_1 \in$ K_1,

მაშინ

$$\left|g(t, x_1, x_2, u) - g\big(t, y_1,\ y_2, u\big)\right| =\left| \chi(x_1) f(t, x_1, x_2, u) - \chi(y_1) f\big(t, y_1,\ y_2, u\big)\right| =$$

$$= \left|\chi(x_1)\big(f(t, x_1, x_2, u) - f(t, y_1,\ y_2, u)\big) + \big(\chi(x_1) - \chi(y_1)\big) f(t, y_1,\ y_2, u)\right|$$

$$\leq L_{K_1}(t) \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| + |\ \chi(x_1) - \chi(y_1)| m_{K_1}(t). \qquad (2.6)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|\chi(x_1) - \chi(y_1)| = \left|\int_0^1 \frac{d}{d\xi}\ \chi\big(y_1 + \xi(x_1 - y_1)\big) d\xi\right|$$

$$\leq \int_0^1 \big[\left|\chi_{x_1}(\cdot)\right| |x_1 - y_1|\big] d\xi \leq \alpha_0\ |x_1 - y_1| \leq \alpha_0 \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|, \qquad (2.7)$$

(2.6)-დან (2.7)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ (2.5)-ს.

ვთქვათ, $x_1\ \in\ K_1$ და $y_1 \notin\ K_1$, მაშინ $\chi(y_1) = 0$, ე.ი. $g(t, y_1, y_2, u) = 0$, ამიტომ მივიღებთ

$$|g(t, x_1, x_2, u) -\ g(t, y_1, y_2, u)| = |g(t, x_1, x_2, u)| = |\ \chi(x_1) - \chi(y_1)||f(t, x_1, x_2, u)|$$

$$\leq \alpha_0 m_{K_1}(t) \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| \leq L(t) \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|.$$

ანალოგიურად მტკიცდება (2.5) უტოლობა, როცა $x_1 \notin K_1$ და $y_1 \in K_1$.

ლემა (2.3) დამტკიცებულია.

განვიხილოთ $\mu_0 = \big(t_{00},\ \tau_0, x_{00,}\varphi_0\big) \in\ \Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ოპტიმალური ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int\limits_{t-\tau_0}^{t} \sigma\big(s, x(s)\big)ds, u(t)\right), t \in [t_{00}, t_{10}], \\ x(t) = \varphi_0(t),\ t \in [\hat{\tau}, t_{00}),\ \ x(t_{00}) = x_{00}, \\ J\big(u(\cdot)\big) = \int\limits_{t_{00}}^{t_{10}} f_0\left(t, x(t), \int\limits_{t-\tau_0}^{t} \sigma\big(s, x(s)\big)ds, u(t)\right)dt \to min \end{cases} \tag{2.8}$$

თეორემა 2.2.(ოპტიმალური მართვის არსებობა[3]). ვთქვათ, შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $\mu_0 = \big(t_{00},\ \tau_0, x_{00,}\varphi_0\big) \in \Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნთა ოჯახი X_0 განმარტებულია $\big[\hat{\tau},\ t_{10}\big]$-ზე და ვთქვათ არსებობს ისეთი კომპაქტი $K_0 \subset O$ რომ

$$x_0(t, u) \in K_0,\ t\epsilon\big[t_{00},\ t_{10}\big], \forall u \in \Omega;$$

2) ყოველი ფიქსირებული $(t, x_1, x_2) \in I \times O \times R^n$-სთვის სიმრავლე

$$P(t, x_1, x_2) = \{F(t, x_1, x_2, u) \colon u \in U\} \subset R^{1+n},$$

სადაც $F = (f_0, f)^T$, ამოზნექილია.

მაშინ (2.8) ამოცანისთვის არსებობს ოპტიმალური მართვა.

3. უწყვეტობის თეორემა ოპერატორის შემცველი დიფერენციალური განტოლებისთვის

ყოველ $\mu = (t_0, \tau, x_{0,}\varphi) \in \Lambda = [\mathrm{a}, \mathrm{b}) \times I_2 \times O \times \Phi$ ელემენტს და $u \in \Omega$ მართვას შევუსაბამოთ $h(\cdot)$ ოპერატორის შემცველი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{y}(t) = f\left(t, y(t), \int_{t-\tau}^{t} \sigma\big(s, h(t_0, \varphi, y)(s)\big)ds, u(t)\right) \qquad (3.1)$$

საწყისი პირობით

$$y(t_0) = x_0 \qquad (3.2)$$

სადაც

$$h : I \times \Phi \times C(I) \to C(I_1)$$

არის ოპერატორი მოცემული შემდეგი ფორმულით:

$$h(t_0, \varphi, y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\hat{\tau}, t_0), \\ y(t), & t \in [t_0, b) \end{cases} \qquad (3.3)$$

განსაზღვრება 3.1. აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას $y(t) = y(t; \mu, u) \in O,\ t \in [r_1, r_2] \subset I$ ეწოდება $(3.1) - (3.2)$ ამოცანის ამონახსნი ან $\mu = (t_0, \tau, x_{0,}\varphi) \in \Lambda$ ელემენტის და $u \epsilon \Omega$ მართვის შესაბამისი ამონახსნი განმარტებული $[r_1, r_2]$ ინტერვალზე, თუ $t_0 \in [r_1, r_2]$-სთვის აკმაყოფილებს (3.2) პირობას და თითქმის ყველა $t \in [r_1, r_2]$ –სთვის (3.1) განტოლებას.

შენიშვნა 3.1. ვთქვათ, $y(t; \mu, u), t \in [r_1, r_2], \mu \in \Lambda$ არის $(3.1) - (3.2)$ ამოცანის ამონახსნი, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ფუნქცია

$$x(t; \mu, u) = h(t_0, \varphi, y(\cdot, \mu, u))(t), t \in [\hat{\tau}, r_2)$$

იქნება (2.1)-(2.2) ამოცანის ამონახსნი.

თეორემა 3.1. ვთქვათ, $\mu_0 = \left(t_{00},\ \tau_0, x_{00,}\varphi_0\right) \in\ \Lambda$ ფიქსირებული ელემენტია, ხოლო ამონახსნთა ოჯახი $Y_0 = \{y_0(t;u) = y(t;\mu_0,u): u \in \Omega\}$ განმარტებულია $\left[r_1,\ r_2\right]$-ზე და ვთქვათ $y_0(t;u) \in\ K_0$, $t \in \left[r_1,\ r_2\right]$, $\forall u(t) \in \Omega$, სადაც $K_0 \subset O$ კომპაქტია. ვთქვათ, $K_1 \subset O$ კომპაქტია, რომელიც შეიცავს $\varphi_0(I_1) \cup K_0$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს, მაშინ სამართლიანია შემდეგი მტკიცებულება:

1) $\exists\ \delta_i > 0,\ i = 0,\ 1.$ ისეთი, რომ $\forall \mu\ \in V(\mu_0;\delta_0)$ ელემენტისთვის ამონახსნთა ოჯახი $Y(\mu)$ განმარტებულია $[r_1 - \delta_{1,}\ r_2 + \delta_1]\ \subset I$, ამასთან

$$\varphi(t) \in\ K_1,\ t\ \in\ I_1; y(t;\mu,u) \in\ K_{1,}\ \ t\ \in \left[r_1 - \delta_{1,}\ r_2 + \delta_1\right], \forall u\ \in\ \Omega.$$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in\ (0, \delta_0)$ ისეთი, რომ $\forall \mu \in V(\mu_0;\delta_2)$ ელემენტისთვის და $\forall u \in \Omega$ მართვისთვის

$$|y(t;\mu,u) - y(t;\mu_0,u)| \le \varepsilon\ ,\ \forall t\ \in\ [r_1 - \delta_{1,}\ r_2 + \delta_1].$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\varepsilon_0 > 0$ ისეთი მცირე რიცხვია, რომ K_0 სიმრავლის ჩაკეტილი $\varepsilon_0 > 0$ - მიდამო

$$K_0(\varepsilon_0) = \{x \in R^n : \exists \hat{x} \in K_0\ |x - \hat{x}| \le \varepsilon_0\}$$

მდებარეობს $intK_1$-ში. არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $Q: K_0(\varepsilon_0) \subset Q \subset K_1$ და (2.3) თვისების მქონე უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია $\chi: R^n \to [0,1]$ (იხ.ლემა 2.2).

ყოველ $\mu\ \epsilon\ \Lambda$ ელემენტს და $u \in \Omega$ მართვას შევუსაბამოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{z}(t) = g\left(t, z(t), \int_{t-\tau}^{t} \omega\big(s, h(t_0,\varphi,z)(s)\big)ds, u(t)\right) \qquad (3.4)$$

საწყისი პირობით

$$z(t_0) = x_0, \qquad (3.5)$$

სადაც

$$g(t, x_1, x_2, u) = \chi(x_1)f(t, x_1, x_2, u), \omega(s, x_1) = \chi(x_1)\sigma(s, x_1).$$

ლემა 2.3-ის ძალით ფუნქცია $g(t, x_1, x_2, u)$ აკმაყოფილებს (2.4) და (2.5) პირობებს, ხოლო ფუნქცია $\omega(s, x_1)$ თითქმის ყველა $s \in I_1$ აკმაყოფილებს პირობებს:

$$|\omega(s, x_1)\ | \leq \widehat{m}_{K_1}(s), \forall x_1 \in R^n;$$

$$|\omega(s, x_1) - \omega(s, y_1)| \leq \hat{L}(t)|x_1 - y_1|, (x_1, y_1) \in R^n \times R^n,$$

სადაც

$$\hat{L}(t) = L_{K_1}(t) + \alpha_0 \widehat{m}_{K_1}(t).$$

შემოვიღოთ $\mu \epsilon \Lambda$ ელემენტის და $u \in \Omega$ მართვის შესაბამის ასახვათა ოჯახი

$$F(\cdot; \mu, u) : C(I) \to C(I) \quad (3.7)$$

შემდეგი ფორმულით:

$$\zeta(t) = \zeta(t; z, \mu, u) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g\left(\xi, z(\xi), \int_{\xi-\tau}^{\xi} \omega\big(s, h(t_0, \varphi, z)(s)\big)ds, u(\xi)\right)d\xi, t \in I. (3.8)$$

ცხადია რომ (3.8) ასახვის ყოველი უძრავი $z(t; \mu, u), t \in I$ წერტილი იქნება (3.4)-(3.5) ამოცანის ამონახსნი. განვსაზღვროთ (3.7) ასახვის k-ური იტერაცია $F^k(\ z\ , \mu, u)$ შემდეგნაირად

$$\zeta_k(t) = \zeta_k(t; z, \mu, u) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g\left(\xi, \zeta_{k-1}(\xi), \int_{\xi-\tau}^{\xi} \omega\big(s, h(t_0, \varphi, \zeta_{k-1})(s)\big)ds, u(\xi)\right)d\xi,\ t \in I,$$

$k = 1,2, \dots,\ \zeta_0(t) = z(t).$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ საკმარისად დიდი k-სთვის $F^k(\ z\ , \mu, u)$ ოჯახი არის თანაბრად კუმშვადი. ამ მიზნით შევაფასოთ სხვაობა

$$|\zeta_k'(t) - \zeta_k''(t)| = |\zeta_k(t; z', \mu, u) - \zeta_k(t; z'', \mu, u)| \leq$$

$$\int_a^t \left| g\left(\xi, \zeta'_{k-1}(\xi), \int_{\xi-\tau}^{\xi} \omega\big(s, h(t_0, \varphi, \zeta'_{k-1})(s)\big)ds, u(\xi)\right) - g\left(\xi, \zeta''_{k-1}(\xi) \int_{\xi-\tau}^{\xi} \omega\big(s, h(t_0, \varphi, \zeta''_{k-1})(s)\big)ds, u(\xi)\right)\right| d\xi$$

$$\leq \int_a^t L(\xi) \left\{|\zeta'_{k-1}(\xi) - \zeta''_{k-1}(\xi)| + \int_{\xi-\tau}^{\xi} \hat{L}(s)\, |h(t_0, \varphi, \zeta'_{k-1})(s) - h(t_0, \varphi, \zeta''_{k-1})(s)| ds, u(\xi)\right\} d\xi, k = 1,2, \dots, \quad (3.9)$$

სადაც $\zeta'_0 = z'(t)$ და $\zeta''_0 = z''(t)$.

$h(\cdot)$ ოპერატორის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$h(t_0, \varphi, \zeta'_{k-1})(s) - h(t_0, \varphi, \zeta''_{k-1})(s) = h(t_0, 0, \zeta'_{k-1} - \zeta''_{k-1})(s).$$

უკანასკნელი ტოლობის გამოყენებით (3.9) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს

$$|\zeta'_k(t) - \zeta''_k(t)| \leq \int_a^t L_f(\xi) \left\{\max_{\vartheta\epsilon[a,\xi]} \left|\zeta'_{k-1}(\theta) - \zeta''_{k-1}(\theta)| + \int_{\xi-\tau}^{\xi} \hat{L}(s) \max_{\theta\in[a,\xi]} |\zeta'_{k-1}(\theta) - \zeta''_{k-1}(\theta)\right| ds\right\} d\xi$$

$$= \int_a^t \tilde{L}\,(\xi) \max_{\theta\in[a,\xi]} |\, \zeta'_{k-1}(\theta) - \zeta''_{k-1}(\theta)| d\xi\ ,$$

სადაც

$$\tilde{L}(\xi) = L(\xi)\left(1 + \int_{\xi-\tau}^{\xi} \hat{L}(s) ds\right).$$

შემდეგ

$$\max_{\theta\in[a,\xi]} |\, \zeta'_{k-1}(\theta) - \zeta''_{k-1}(\theta)| \leq \int_a^t \tilde{L}\,(\xi)\{\max_{\theta\epsilon[a,\xi]} |\, \zeta'_{k-2}(\theta) - \zeta''_{k-2}(\theta)| d\xi.$$

ამიტომ

$$|\zeta'_k(t) - \zeta''_k(t)| \leq \int_a^t \tilde{L}(\xi_1) d\xi_1 \int_a^{\xi_1} \tilde{L}(\xi_2) \max_{\theta\epsilon[a,\xi_2]} |\zeta'_{k-2}(\theta) - \zeta''_{k-2}(\theta)| d\xi_2.$$

ამ პროცედურის გაგრძელებით, მივიღებთ რომ

$$|\zeta_k'(t) - \zeta_k''(t)| \leq \alpha_k(t)\|z' - z''\|_I,$$

სადაც

$$\alpha_k(t) = \int_a^t \tilde{L}(\xi_1)d\xi_1 \int_a^{\xi_1} \tilde{L}(\xi_2)d\xi_2 \dots \int_a^{\xi_{k-1}} \tilde{L}(\xi_k)d\xi_k\,.$$

ინდუქციით, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{k!}\left(\int_a^t \tilde{L}(\xi)d\xi\right)^k.$$

ამგვარად

$$\rho\left(F^k(z';\mu,u), F^k(z'';\mu,u)\right) = \|\zeta_k' - \zeta_k''\|_I \leq \frac{1}{k!}\left(\int_a^b \tilde{L}(t)dt\right)^k \|\zeta_k' - \zeta_k''\|_I = \alpha_k\|\zeta_k' - \zeta_k''\|_I.$$

არსებობს ნატურალური რიცხვი k_1 ისეთი რომ $\alpha_{k_1} < 1$. ამრიგად, (3.7) ასახვის k_1 იტერაცია კუმშვადია. თეორემა 2.1-ის თანახმად (3.7) ასახვას ყოველი $(\mu, u) \in \Lambda \times \Omega$-სთვის აქვს ერთად-ერთი უძრავი წერტილი. აქედან გამომდინარე (3.4)-(3.5) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $z(t;\mu,u), t\epsilon I$. ახლა დავამტკიცოთ, რომ ასახვა $F^k(z(\cdot\,;\mu_0,u);\mu,u)$ უწყვეტია $\mu = \mu_0$ წერტილში ნებისმიერი $k = 1,2,\dots$, თანაბრად $u \in \Omega$ მიმართ. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ მიმდევრობა $\mu_i = (t_{0i}, \tau_i, x_{0i}, \varphi_i), i = 1,2,\dots$ მიისწრაფის $\mu_0 = (t_{00}, \tau_0, x_{00}, \varphi_0)$-სკენ ე.ი. თუ

$$\lim_{t\to\infty}\left(|t_{0i} - t_{00}| + \|\tau_i - \tau_0\|_I + |x_{0i} - x_{00}| + \|\varphi_i - \varphi_0\|_{I_1}\right) = 0$$

მაშინ

$$\lim_{t\to\infty} F^k(z(\cdot\,;\mu_0,u);\mu_i,u) = F^k(z(\cdot\,;\mu_0,u);\mu_0,u) = z(\cdot\,;\mu_0,u) \quad (3.10)$$

თანაბრად $u \in \Omega$

(3.10) ტოლობა დავამტკიცოთ ინდუქციით. ვთქვათ, $k = 1$, მაშინ ჩვენ გვაქვს

$$\left|\zeta_1^i(t)-z_0(t)\right| \le |\varphi_i(t_{0i})-\varphi_0(t_{00})| + \left|\int_{t_{0i}}^{t} g\left(\xi, z_0(\xi), \int_{\xi-\tau_i}^{\xi} \omega\big(s, h(t_{0i},\varphi_i,z_0)(s)\big)ds, u(\xi)\right)\right) d\xi$$

$$-\int_{t_{00}}^{t} g\left(\xi, z_0(\xi), \int_{\xi-\tau_0}^{\xi} \omega\big(s, h(t_{00},\varphi_0,z_0)(s)\big)ds, u(\xi)\right)\right) d\xi\Bigg| \le \alpha_1^i + \alpha_2^i(t), \quad (3.11)$$

სადაც

$$\zeta_1^i(t) = \zeta_1(t; z, \mu_i),\ z_0(t) = z(t; \mu_0, u),$$

$$\alpha_1^i = |\varphi_i(t_{0i})-\varphi_0(t_{00})| + \left|\int_{t_{00}}^{t_{0i}} g\left(\xi, z_0(\xi), \int_{\xi-\tau_0}^{\xi} \omega\big(s, h(t_{00},\varphi_0,z_0)(s)\big)ds, u(\xi)\right) d\xi\right|,$$

$$\alpha_2^i(t) = \int_{t_{0i}}^{t} \Bigg| g\left(\xi, z_0(\xi), \int_{\xi-\tau_i}^{\xi} \omega\big(s, h(t_{0i},\varphi_i,z_0)(s)\big)ds, u(\xi)\right)\right)$$

$$- g\left(\xi, z_0(\xi), \int_{\xi-\tau_0}^{\xi} \omega\big(s, h(t_{00},\varphi_0,z_0)(s)\big)ds, u(\xi)\right)\right)\Bigg| d\xi\Bigg|$$

(2.4)-ის ძალით მივიღებთ

$$\alpha_1^i \le |\varphi_i(t_{0i})-\varphi_0(t_{00})| + \left|\int_{t_{0i}}^{t_{00}} m_K(\xi)d\xi,\right|$$

ამიტომ

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_1^i = 0 \qquad (3.12)$$

ელემენტარული გარდაქმნებით გვექნება

$$\alpha_2^i(t) = \left|\int_{t_{0i}}^{t} L(\xi)\left|\int_{\xi-\tau_i}^{\xi} \omega\big(s, h(t_{0i},\varphi_i,z_0)(s)\big)ds \quad \int_{\xi-\tau_0}^{\xi} \omega\big(s, h(t_{00},\varphi_0,z_0)(s)\big)ds\right| d\xi\right| \le \int_a^b L(\xi)\left(\vartheta_1^i(\xi)+\vartheta_2^i(\xi)\right)d\xi$$

სადაც

$$\vartheta_1^i(\xi)=2\left|\int\limits_{\xi-\tau_i}^{\xi-\tau_0}\widehat{m}(s)ds\right|,\ \vartheta_2^i(\xi)=\int\limits_{\xi-\tau_0}^{\xi}\hat{L}(s)|h\big(t_{0i},\varphi_i,z_0\big)(s)-h\big(t_{00},\varphi_0,z_0\big)(s)|ds$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{i\to\infty}\vartheta_1^i(\xi)=0, \qquad (3.13)$$

თანაბრად $\xi\in I$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $s_1^i=\min\{t_{0i},t_{00}\}, s_2^i=\max\{t_{0i},t_{00}\}$.

ადვილი შესამჩნევია რომ

$$(s_2^i-s_1^i)\to 0, \text{როცა } i\to 0.$$

შემდეგ

$$\int\limits_a^b L(\xi)\vartheta_2^i(\xi)\,d\xi\le\int\limits_a^b L(\xi)\left\{\int\limits_{\hat{\tau}}^{s_1^i}\hat{L}(s)|\varphi_i(s)-\varphi_0|ds+\int\limits_{s_1^i}^{s_2^i}\hat{L}(s)(|z_0(s)-\varphi_i(s)|+|z_0(s)-\varphi_i(s)|)ds\right\}d\xi\to 0.$$

(3.12), (3.13) და უკანასკნელი თანაფარდობის საფუძველზე (3.11)-დან გამომდინარეობს

$$\left\|\zeta_1^i-z_0\right\|_I\to 0, \text{როცა } i\to\infty.$$

დავუშვათ (3.10) სამართლიანია გარკვეული $k>1$. ახლა დავამტკიცოთ $k+1$-სთვის. გვაქვს

$$\left|\zeta_{k+1}^i(t)-z_0(t)\right|\le|\varphi_i(t_{0i})-\varphi_0(t_{00})|+\left|\int\limits_{t_{0i}}^{t}g\left(\xi,\zeta_k^i(\xi),\int\limits_{\xi-\tau_i}^{\xi}\omega\left(s,h\big(t_{0i},\varphi_i,\zeta_k^i\big)(s)\right)ds,u(\xi))\right)d\xi\right.$$

$$\left.-\int\limits_{t_{00}}^{t}g\left(\xi,z_0(\xi),\int\limits_{\xi-\tau_0}^{\xi}\omega\big(s,h(t_{00},\varphi_0,z_0)(s)\big)ds,u(t)\right)d\xi\right|\le\alpha_1^i+\alpha_{2k}^i(t),$$

α_1^i უკვე შეფასებული გვაქვს, ახლა შევაფასოთ $\alpha_{2k}^i(t)$.

$$\alpha_{2k}^i(t)=\int\limits_{t_{0i}}^{t}\left|g\left(\xi,\zeta_k^i(\xi),\int\limits_{\xi-\tau_i}^{\xi}\omega\left(s,h\big(t_{0i},\varphi_i,\zeta_k^i\big)(s)u(\xi)\right)\right)-g\,\xi,z_0(\xi),\int\limits_{\xi-\tau_0}^{\xi}\omega\big(s,h(t_{00},\varphi_0,z_0)(s)\big)u(\xi))\right)\right|d\xi\Bigg|$$

$$\leq \int_a^b L(\xi)\left(\vartheta_1^i(\xi)+\vartheta_{2k}^i(\xi)\right)d\xi.$$

აქ

$$\vartheta_{2k}^i(\xi)=\int_{\xi-\tau_0}^{\xi}\hat{L}(s)|h\big(t_{0i},\varphi_i,\zeta_k^i\big)(s)-h(t_{00},\varphi_0,z_0)(s)|ds.$$

$$\int_a^b L(\xi)\vartheta_{2k}^i(\xi)\,d \leq \int_a^b L(\xi)\left|\zeta_k^i(\xi)-z_0(\xi)\right|d\xi$$

$$+\int_a^b L(\xi)\left\{\int_{\hat{\tau}}^{s_1^i}\hat{L}(s)|\varphi_i(s)-\varphi_0|ds+\int_{s_1^i}^{s_2^i}\hat{L}(s)\big(\left|\zeta_k^i(s)-\varphi_0(s)\right|+|z_0(s)-\varphi_i(s)|\big)ds\right.$$

$$\left.+\int_a^b L(\xi)\left|\zeta_k^i(s)-z_0(s)\right|ds\right\}d\xi.$$

ცხადია უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარე მიისწრაფის ნულისკენ.

ამრიგად დავასკვნით, რომ (3.10) სამართლიანია.

დავუშვათ, $\delta_1>0$ ისეთი მცირეა რომ

$[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\subset I;\ |z(t;\mu_0,u)-z(r_1;\mu_0,u)|\leq\frac{\varepsilon_0}{2}, t\in[r_1-\delta_1,r_1];\ |z(t;\mu_0,u)-z(r_2;\mu_0,u)|\leq\frac{\varepsilon_0}{2}$, $t\in[r_2,r_2+\delta_1]$. $z(t;\mu_0,u)$ ამონახსნის ერთადერთობიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$z(t;\mu_0,u)=y_0(t)\ t\epsilon[r_1,r_2].$$

ამიტომ გვექნება

$$z(t;\mu_0,u)\in K_0(\tfrac{\varepsilon_0}{2}),t\epsilon[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1],\forall u\in\Omega;h\big(t_{00},\varphi_0,z(\,\cdot\,;\mu_0,u)\big)(s)\in K_0(\tfrac{\varepsilon_0}{2}),\ s\epsilon[t-\tau_0,t].$$

ამრიგად

$$\chi\big(z(t;\mu_0,u)\big)=1,t\epsilon[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1],\chi\left(h\big(t_{00},\varphi_0,z(\,\cdot\ \mu_0,u)\big)(s)\right)=1,s\epsilon[t-\tau_0,t].$$

ე.ი. ფუნქცია $z(t;\mu_0,u)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{y}(t) = f\left(t, y(t), \int_{t-\tau_0}^{t} \sigma\big(s, h(t_{00},\varphi_0,y)(s)\big)ds, u(t)\right)$$

საწყის პირობით

$$y(t_{00}) = \varphi_0(t_{00}).$$

ამრიგად, $y(t;\mu_0,u) = z(t;\mu_0,u), t\epsilon[r_1-\delta_1, r_2+\delta_1]$. თეორემა 2.1-ის თანახმად $\varepsilon_0/2$-სთვის არსებობს $\delta_0\epsilon(0,\varepsilon_0)$ რიცხვი, ისეთი რომ

$$|z(t;\mu,u) - z(t;\mu_0,u)| \le \frac{\varepsilon_0}{2}, t\epsilon I, \mu\,\epsilon\, \mathrm{V}(\mu_0;\delta_0).$$

უკანასკნელი უტოლობისა და $\varphi(t)\epsilon K(\varepsilon_0)$, $t\in I_1$ გათვალისწინებით გვექნება

$$\chi\big(z(t;\mu,u)\big) = 1, t\epsilon[r_1-\delta_1, r_2+\delta_1], \chi\Big(h\big(t_0,\varphi,z(\cdot\ \mu,u)\big)(s)\Big) = 1, s\epsilon[t-\tau,t].$$

ამრიგად, $z(t;\mu,u)$ აკმაყოფილებს (3.1) განტოლებას და (3.2) საწყის პირობას, ე.ი.

$$y(t;\mu,u) = z(t;\mu,u), t\in[r_1-\delta_1, r_2+\delta_1], \forall\mu\ \in\ V(\mu_0;\delta_0), \forall u\in\Omega. \qquad (3.14)$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. თეორემა 2.2-ის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0,\delta_0)$ რიცხვი ისეთი რომ

$$|z(t;\mu,u) - z(t;\mu_0,u)| \le \varepsilon, t\epsilon I.$$

(3.14)-ის გამოყენებით მივიღებთ 2)-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

4. თეორემა 1.1.-ის დამტკიცება

ვთქვათ, თეორემა 3.1.-ში $r_1 = t_{00}$ და $r_2 = t_{10}$. ცხადია, ფუნქცია $x_0(t,u), t \in [t_{00}, t_{10}]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{y}(t) = f\left(t, y(t), \int_{t-\tau_0}^{t} \sigma\big(s, h(t_{00}, \varphi_0, y)(s)\big)ds, u(t)\right).$$

ამიტომ, თეორემა 3.1.-ში $y_0(t,u)$-ს როლში შეგვიძლია ავიღოთ $x_0(t,u)$, $t \in [t_{00}, t_{10}]$ ფუნქცია. თეორემა 3.1.-ის მიხედვით არსებობს რიცხვები $\delta_i > 0, i = 0,1,$ და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს ისეთი $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$ რიცხვი, რომ ამონახსნი $y(t;\mu,u), t \in [r_1 - \delta_1,\ r_2 + \delta_1]$, შეესაბამება ყოველ $\mu \in V(\mu_0;\delta_0)$ ელემენტს და $u \in \Omega$. გარდა ამისა,

$$\begin{cases} \varphi(t) \in K_1, t \in I_1; y(t;\mu,u) \in K_1, \\ |y(t;\mu,u) - y(t;\mu_0,u)| \le \varepsilon, t \in [t_{00} - \delta_1, t_{10} + \delta_1], \\ \mu \epsilon V(\mu_0;\delta_0). \end{cases} \qquad (4.1)$$

ნებისმიერი $\mu \epsilon V(\mu_0;\delta_0)$ ელემენტისთვის და $u \in \Omega$ მართვისთვის , ფუნქცია

$$x(t;\mu,u) = h\big(t_0, \varphi, y(\cdot;\mu,u)\big)(t), t \in [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1)$$

ანუ

$$x(t;\mu,u) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0), \\ y(t;\mu), t \in [t_0, t_{10} + \delta_1]. \end{cases}$$

არის ამონახსნი. უფრო მეტიც, თუ $t \in [\theta, t_{10} + \delta_1]$, სადაც $= max\{t_0, t_{00}\}$, მაშინ

$$x(t;\mu,u) = y(t;\mu,u)\ x(t;\mu_0,u) = y(t;\mu_0,u).$$

(4.1)-დან უკანასკნელი ტოლობების გათვალისწინებით გამომდინარეობს 1) და 2).

ადვილი შესამჩნევია რომ ნებისმიერი $\mu \epsilon V(\mu_0;\delta_0)$ ელემენტისთვის და $u \in \Omega$ მართვისთვის გვექნება

$$\int_{\hat{\tau}}^{t_{10}+\delta_1} |x(t;\mu,u) - x(t;\mu_0,u)|\, dt = \int_{\hat{\tau}}^{\theta_0} |\varphi(t) - \varphi_0(t)| dt + \int_{\theta_0}^{\theta} |x(t;\mu,u) - x(t;\mu_0,u)|\, dt +$$

$$+\int_{\theta}^{t_{10}+\delta_1} |x(t;\mu,u)-x(t;\mu_0,u)|\,dt \le \|\varphi-\varphi_0\|_{I_1}(b-\hat{\tau})+M|t_{10}-t_{00}|+$$

$$+\max_{t\in[\theta,t_{10}+\delta_1]}|x(t;\mu,u)-x(t;\mu_0,u)|(b-\hat{\tau}),$$

სადაც $\theta_0 = min\{t_0\,,t_{00}\}, M = \sup\{|x-y|: x,y \in K_1\}$.

1.1), 1.2) და ბოლო უტოლობა იძლევა 1.3). თეორემა 1.1 დამტკიცებულია.

5. თეორემა 1.2.-ის დამტკიცება

თეორემა 1.2.-ის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ შესრულებულია არსებობის თეორემა 2.2-ის პირობები. μ_0 ელემენტის ოპტიმალური მართვის არსებობა თეორემა 2.2-ის შედეგია. შეშფოთებული ოპტიმალური ამოცანის შესაბამისი $P(t, x_1, x_2)$ სიმრავლე უცვლელია და ამიტომ იგი ამოზნექილია. ამრიგად თეორემა 2.2.-ის მე-2 პირობა შესრულებულია. ვთქვათ, $K_1 \subset O$ კომპაქტი შეიცავს $\varphi_0(I_1) \cup K_0$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს. თეორემა 1.1-ის ძალით არსებობს მაშინ $x_0(t, u) \in K_0$, $\forall u \in \Omega$, $t \in [\hat{\tau}, t_0]$. ვთქვათ, რომელიც შეიცავს K_0-ის რაიმე მიდამოს, თეორემა 1.1.-ის ძალით არსებობს $\varepsilon > 0$ რიცხვი ისეთი რომ $\mu \epsilon V(\mu_0; \varepsilon)$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნთა ოჯახი განმარტებულია $[\hat{\tau}, t_{10}]$-ზე და მნიშვნელობებს იღებს K_1 კომპაქტიდან, ე.ი. შესრულებულია თეორემა 1.2.-ის პირველი პირობაც. ამრიგად, შეშფოთებული ოპტიმალური ამოცანისთვის არსებობს ოპტიმალური მართვა.

დასკვნა

სამართი არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის განაწილე-ბული დაგვიანებით, დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის საწყის მონაცემებზე უწყვეტად დამოკიდებულების შესახებ თანაბრად მართვის ფუნქციების მიმართ. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, დაგვიანების პარამეტრის, საწყისი ფუნქციისა და საწყისი ვექტორის ერთობლიობა. საწყისი მონაცემების შეშფოთება მცირეა სტანდარტული ნორმის აზრით. ოპტიმალური ამოცანისთვის გამოკვლეულია ოპტიმალური მართვის არსებობის სენსიტიურობის საკითხი. სახელდობრ, დამტკიცებულია რომ თუ საწყისი ოპტიმალური ამოცანისთვის არსებობს ოპტიმალური მართვა, მაშინ შეშფოთებული ოპტიმალური ამოცანისთვისაც იარსებებს ოპტიმალური მართვა.

ლიტერატურა

[1] G.I. Marchuk, G.I. Mathematical modeling of immune response in infectious diseases(Vol. 395). Springer Science & Business Media 2013.

[2] R.V. Gamkrelidze, Principles of optimal control theory, volume 7 of Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, 1978.

[3] T. Tadumadze , Some problems in the qualitative theory of optimal control.(Russian) *Tbilis. Gos. Univ. ,* Tbilisi*,* 1983.

[4] P. Dvalishvili, T. Tadumadze, On the well-posedness of the Cauchy problem for differential equations with distributed prehistory considering delay function perturbations. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute,* 170 (2016), 7-18.

[5] Ph. Dvalishvili, A. Nachaoui, M. Nachaoui, T. Tadumadze, On the well-posedness of the Cauchy problem for one class of differential equation with distributed delay and the continuous initial condition. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 43, (1) 2017, 146-160.

[6] J. Hale, Theory of functional differential equations (Russian), “Mir”, Moscow, 1984.