ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სხვაობიანი განტოლებების ამონახსნების რხევადობის კრიტერიუმები მრავალი დაგვიანებით

ნათია ხაჩიძე

მათემატიკის დეპარტამენტი

კოლოქვიუმი I

ხელმძღვანელი-რომან კოპლატაძე, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის, ასოცირებული პროფესორი.

თბილისი 2018

სარჩევი

რეზიუმე

განხილულია სემდეგი სახის სხვაობიანი განტოლება

$$\Delta u(k) + \sum_{i=1}^{m} p_i(k) u(\tau_i(k)) = 0,$$

სადაც $m \in N$, ფუნქციები $p_i : N \to R_+$, $\tau_i : N \to N$ განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე. τ_i ფუნქციებისთვის სრულდება პირობები

$$\lim_{k\to+\infty} \tau_i(k) = +\infty \qquad \text{და} \qquad \tau_i(k) \le k-1 \qquad (i = 1,\ldots, m).$$

სხვაობის ოპერატორი განსაზღვრულია შემდეგი სახით

$$\Delta\ \ (k) = u(k+1) - u(k).$$

ზემოთ მოყვანილი განტოლების ყოველი ამონახსნისთვის დადგენილია რხევადობის კრიტერიუმები.

1. შესავალი

განვიხილოთ სხვაობიანი განტოლება

$$\Delta u(k)+\sum_{i=1}^{m} p_i(k)u(\tau_i(k))=0, \tag{1.1}$$

სადაც $m \geq 1$ ნატურალური რიცხვია, $p_i : N \to R_+$, $\tau_i : N \to N$ განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე და $\Delta\ \ (k)=u(k+1)-u(k).$

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება

$$\lim_{k\to+\infty} \tau_i(k)=+\infty \qquad \text{და} \qquad \tau_i(k)\leq k-1 \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{1.2}$$

ყოველი $m \in N-$თვის აღვნიშნოთ სიმრავლე $N_n=\{n,n+1,\ldots\}.$

განმარტება 1.1. ვთქვათ $n \in N,\ \ u : N \to R$ ფუნქციას ვუწოდებთ (1.1) განტოლების წესიერ ამონახსნს N_n სიმრავლეზე, თუ გი აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას N_n სიმრავლეზე და

$$\sup\{|u(i)| : i \geq k\} > 0 \qquad \text{სადაც} \quad k \in N_n .$$

განმარტება 1.2. ვიტყვთ, რომ (1.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი $u : N_n \to R$ რხევადია, თუ ყოველი $k \in N_n$ -თვის არსებობს $n_1, n_2 \in N_k$ ისეთი, რომ $u(n_1)u(n_2)\leq 0.$ წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ამონახსნი არაა რხევადი.

განმარტება 1.3. ვიტყვით რომ (1.1) განტოლება რხევადია, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

წრფივი სხვაობიანი განტოლების ((1.1)) ამონახსნების რხევადობის პრობლემა შესწავლილია რამდენიმე ავტორისმიერ [1-3. როცა m=1. ანალოგიური პრობლემები (1.1) განტოლებისათვის და დიფერენციალური განტოლებისათვის შესწავლილია შრომებში [4-10].

აქ მოყვანილი ზოგიერთი შედეგები დამტკიცების გარეშე მოყვანილია [11] შრომაში.

2. ზოგიერთი დამხმარე ლემა

შევაფასოთ შემდეგი გამოსახულება

$$\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)} \quad i=1,\dots,m \qquad \text{და} \qquad \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)}\right)^{1/m},$$

სადაც $u: N_{k_0} \to (0;+\infty)$ არარხევადი ამონახსნია (1.1) განტოლების.

ლემა 2.1. ვთქვათ $k_0 \in N$ და $u: N_{k_0} \to (0;+\infty)$ დადებითი ამონახსნია (1.1) განტოლების, მაშინ ყოველი $s \in \{1,2,..\}$ – თვის გვაქვს

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{m} u(\tau_i(k))\right)^{1/m}}{u(k+1)} \geq \left[\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+m\left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(j)\right)^{1/m}\psi_s(j)\right)\right]^{1/m} \tag{2.1}$$

სადაც $k \geq \eta_s^{\tau_*}(k_0) \quad (s=1,2,..)$.

ψ_s და $\eta_s^{\tau_*}$ ფუნქციები განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}
&\tau_*(k)=\min\{\tau_i(k); i=1,\dots,m\},\\
&\eta^{\tau_*}(k)=\max\{s: s\in N, \tau_*(s)\leq k\},\\
&\eta_1^{\tau_*}(k)=\eta^{\tau_*}(k), \qquad \text{როცა } k\in N, (i=2,3,\dots)\\
&\eta_i^{\tau_*}(k)=\eta_1^{\tau_*}(k)\circ\eta_{i-1}^{\tau_*}(k)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\psi_1(k)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)\right) \qquad \text{როცა } k\geq k_0 \tag{2.3}$$

$$\psi_s(k)=\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(s)\psi_{s-1}(j)\right)\right)^{1/m} \quad \text{როცა } k\geq\eta_s^{\tau_*}(k_0) \quad (s=2,3,..) \tag{2.4}$$

$$p(j)=\prod_{i=1}^{m}p_i(j). \tag{2.5}$$

დამტკიცება. (1.1) განტოლებიდან გვაქვს, რომ

$$\frac{u(k)}{u(k+1)}=1+\sum_{i=1}^{m}p_i(k)\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)} \qquad \text{როცა} \quad k\ge\eta_1(k_0) \tag{2.6}$$

თუ განვიხილავთ (2.6) ტოლობის ორივე მხარის ნამრავლს ნამრავლს $\tau_i(k)-$დან $k-$მდე

$$\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\frac{u(j)}{u(j+1)}=\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\left(p_i(j)\frac{u(\tau_i(j))}{u(j+1)}\right)\right) \quad \text{როცა} \quad k\ge\eta_2(k_0) \quad i=1,\dots m\,.$$

მიღებულ ტოლობაში თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ ტოლობას

$$\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\frac{u(j)}{u(j+1)}=\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)}\,,$$

მაშინ

$$\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)}=\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+\sum_{i=1}^{m}p_i(j)\frac{u(\tau_i(j))}{u(j+1)}\right) \qquad \text{როცა} \quad k\ge\eta_2(k_0) \quad i=1,\dots m\,.$$

თუ გამოვიყენებთ საშუალო არითმეტიკულისა და სასუალო გეომეტრიულის უტოლობას, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{u(\tau_i(k))}{u(k+1)}\ge\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+m\left(\prod_{\ell=1}^{m}p_\ell(j)\right)^{1/m}\frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m}u(\tau_\ell(j))\right)^{1/m}}{u(j+1)}\right)^{1/m} \quad \text{როცა} \ k\ge\eta_2(k_0)$$

$$i=1,\dots m$$

მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell(k))\right)^{1/m}}{u(k+1)} \geq \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1+m\left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(j)\right)^{1/m} \frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell(j))\right)^{1/m}}{u(j+1)}\right)\right)^{1/m} \quad \text{როცა } k \geq \eta_2(k_0). \tag{2.7}$$

(1.2) უტოლობით

$$\frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell(k))\right)^{1/m}}{u(k+1)} = \frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell(k))\right)^{1/m}}{\left(u^m(k+1)\right)^{1/m}} \geq \left(\frac{u^m(k+1)}{u^m(k+1)}\right)^{1/m} = 1$$

მაშინ (2.7)-დან გვაქვს, რომ

$$\frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell(k))\right)^{1/m}}{u(k+1)} \geq \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1+mp^{1/m}(j)\right)\right)^{1/m}$$

მაშინ

$$\frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell(k))\right)^{1/m}}{u(k+1)} \geq \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1+m\left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(j)\right)^{1/m} \psi_1^{1/m}(j)\right)\right)^{1/m}$$

(2.1) შესრულდა s=1-თვის. ვიგულისხმოთ, რომ $s=\{1,2,\ldots\}$ თვის სრულდება (2.1), მაშინ (2.7)-დან მივიღებთ

$$\frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell(k))\right)^{1/m}}{u(k+1)} \geq \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1+m\left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(j)\right)^{1/m} \psi_s^{1/m}(j)\right)\right)^{1/m} \quad k \geq \eta_{s+1}^{\tau_*}(k_0).$$

ამით ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2. ვთქვათ

$$\liminf_{k\to+\infty} p(k) > 0 \tag{2.8}$$

და

$$\min\left\{\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)\alpha\right)}{\alpha} : \alpha \ge 1\right\} > 1 \tag{2.9}$$

მაშინ

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\liminf_{k\to+\infty}\psi_s(k)\right) = +\infty \tag{2.10}$$

სადაც p და ψ_s ფუნქციები მოცემულია (2.3)-(2.5) ტოლობებით.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\liminf_{k\to+\infty}\psi_s(k)\right) = \beta < +\infty, \tag{2.11}$$

მაშინ (2.11)-დან ყოველი $\varepsilon \in (0;\beta-1)$ – თვის არსებობს $k_0; s_0 \in N$ ისეთი, რომ

$$\psi_s(k) \ge \beta - \varepsilon \ge 1 \quad \text{როცა} \quad k \in N_{k_0} \quad \text{და} \quad s \in N_{s_0} \tag{2.12}$$

(2.12)-ის თანახმად (2.4)-დან

$$\psi_s(k) \ge \left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m} \qquad \text{როცა} \quad s \ge \eta_{s_0}^{\tau_*}$$

სადაც p განსაზღვრულია (2.5) ტოლობით.

$$\liminf_{k\to+\infty}\psi_s(k) \ge \liminf_{k\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}$$

უკანასკნელი უტოლობიდან (2.11) ტოლობის თანახმად

$$\beta \geq \liminf_{k\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m},$$

ese igi

$$\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}}{\beta}\leq 1. \tag{2.13}$$

(2.13) უტოლობის თანახმად ყოველი $\varepsilon\in(0;\beta)-$თვის გვაქვს

$$\min\left\{\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)\alpha\right)\right)^{1/m}}{\alpha}:\alpha\geq 1\right\}\leq$$

$$\leq\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}}{\beta-\in}=$$

$$=\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)(\beta-\varepsilon)\right)\right)^{1/m}}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\beta-\varepsilon}.$$

(2.13) უტოლობის თანახმად ყოველი $\varepsilon\in(0;\beta)-$თვის გვაქვს

$$\min\left\{\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=\tau_i(k)}^{k}\left(1+mp^{1/m}(j)\alpha\right)\right)^{1/m}}{\alpha}:\alpha\geq 1\right\}\leq\frac{\beta}{\beta-\varepsilon}$$

რადგან უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული $\varepsilon -$ ზე განვიხილოთ ზღვარი როცა $\varepsilon \to 0$, მაშინ მივიღებთ

$$\min\left\{ \frac{\left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=\tau_i(k)}^{k} \left(1 + m p^{1/m}(j)\alpha \right) \right)^{1/m}}{\alpha} : \alpha \geq 1 \right\} \leq 1 .$$

ეს უკანასკნელი ეწინააღმდეგება (2.9) უტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

3.მთავარი შედეგები

თეორემა 3.1. ვთქვათ arsebobs $s_0 \in N$ და არაklebadi ფუნქციები $\sigma_i : N \to N$ $i = 1,\dots, m$ ისეთი, რომ

$$\boldsymbol{\tau}_i(k) + 1 \le \boldsymbol{\sigma}_i(k) \le k \qquad \text{როცა} \quad k \in N \quad i = 1,\dots, m \tag{3.1}$$

და

$$\limsup_{k\to+\infty} \prod_{\ell=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{m} \sum_{s=\sigma_\ell(k)}^{k} p_i(s) \prod_{j=\tau_i(s)}^{\sigma_i(k)-1} \left(1 + mp^{1/m} \psi_{s_0}^{\frac{1}{m}}(j) \right) \right)^{1/m} > \frac{1}{m^m} \tag{3.2}$$

მაშინ (1.1) განტოლება რხევადია, სადაც ψ_{s_0} მოცემულია (2.3), (2.4) და (2.5) ტოლობებიდან როცა $s = s_0$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ (1.1)განტოლებას აქვს არარხევადი წესიერი ამონახსნი $u : N_{k_0} \to R$. $-u(k)$ არის ასევე (1.1) განტოლების ამონახსნი, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ დადებითი ამონახსნის შემთხვევას. მაშინ არსებობს $k_1 \ge k_0$ ისეთი, რომ

$$u(\tau_i(k)) > 0 \qquad \text{როცა} \quad k \in N_{k_1} \quad i = 1,\dots, m.$$

ლემა 2.1-ის თანახმად გვაქვს

$$\frac{\left(\prod_{\ell=1}^{m} u(\tau_\ell(k)) \right)^{1/m}}{u(k+1)} \ge \psi_s(k) \qquad \text{როცა} \quad k \ge \eta_s^{\tau_*}(k_1), \quad s = 1,2,\dots \tag{3.3}$$

სადაც $\eta_s^{\tau_*}$ და $\psi_s(k)$ ფუნქციები მოცემულია (2.2)-(2.5) ტოლობებით.

(1.1) განტოლებიდან (2.2), (3.1) და (2.6)-ის დახმარებით გვაქვს

$$u(\sigma_i(k) \ge \sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} \sum_{j=1}^{m} p_j(s) u(\tau_j(s)) \qquad \text{როცა} \quad k \ge \eta_s^{\tau_*}(k_1), \quad s = 1,2,\dots \tag{3.4}$$

და

$$u(\tau_j(s)) \ge u(\sigma_j(k)) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell(t) \frac{u(\sigma_\ell(t))}{u(t+1)} \right) \quad \text{როცა } \eta_s^{\tau_*}(k_1) \le s \le k, \quad j = 1,\dots,m. \tag{3.5}$$

ამიტომ (3.4) და (3.5)-დან მვიღებთ

$$u(\sigma_i(k)) \ge \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} p_j(s) u(\sigma_j(k)) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell(t) \frac{u(\sigma_\ell(t))}{u(t+1)} \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} u(\sigma_j(k)) \left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} p_j(s) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell(t) \frac{u(\sigma_\ell(t))}{u(t+1)} \right) \right) \quad i = 1,\dots,m.$$

საშუალო არითმეტიკულისა და საშუალო გეომეტრიულის უტოლობის გამოყენებით უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$u(\sigma_i(k)) \ge m \left(\prod_{j=1}^{m} u(\sigma_j(k)) \right)^{1/m} \left(\prod_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} p_j(s) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_i(k)-1} \left(1 + m \left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(t) \right)^{1/m} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{u(\sigma_\ell(t)}{u(t+1)} \right)^{1/m} \right) \right)^{1/m}$$

$$\text{როცა} \quad k \ge \eta_1^{\tau_*}(k_1), \quad i = 1,\dots,m.$$

მეორეს მხრივ ლემა 2.1-დან გვაქვს, რომ

$$\prod_{i=1}^{m} u(\sigma_i(k)) \ge m^m \prod_{i=1}^{m} u(\sigma_i(k)) \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{k} p_i(s) \prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1} \left(1 + m \left(\prod_{\ell=1}^{m} p_\ell(t) \right)^{1/m} \psi_s(t) \right) \right)^{1/m}$$

$$k \ge \eta_s^{\tau_*}(k_1), \; s = 1,2\dots,$$

სადაც $\eta_s^{\tau_*}$ და $\psi_s(k)$ ფუნქციები მოცემულია (2.2)-(2.5) ტოლობებით.

ამიტომ როცა $s = s_0$

$$\limsup_{k\to+\infty}\prod_{i=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{k}p_i(s)\prod_{t=\tau_j(s)}^{\sigma_j(k)-1}\left(1+m\left(\prod_{\ell=1}^{m}p_\ell(t)\right)^{1/m}\psi_{s_0}(t)\right)\right)\right)^{1/m}\le\frac{1}{m^m},$$

რაც ეწინააღმდეგება (3.2) პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 2.1. ვთქვათ არსებობს არაკლებადი ფუნქციები $\sigma_i : N\to N \ \ (i=1,\dots m)$, ისეთი რომ

$$\limsup_{k\to+\infty}\prod_{\ell=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{m}\sum_{s=\sigma_\ell(k)}^{k}p_i(s)\prod_{j=\tau_i(s)}^{\sigma_i(k)-1}\left(1+mp^{1/m}(j)\right)\right)^{1/m}>\frac{1}{m^m}. \tag{3.6}$$

მაშინ (1.1) განტოლება რხევადია, სადაც p მოცემულია (2.5) ტოლობით.

დამტკიცება. რადგან $\psi_s(k)\ge 1$ საკმარისად დიდი $s,k\in N,$ თეორემა 3.1-დან გამომდინარეობს ამ შედეგის დამტკიცება.

შენიშვნა 3.1. ვიგულისხმოთ, რომ

$$\limsup_{k\to+\infty} p_i(k)<+\infty, \qquad (i=1,\dots m).$$

სხვა შემთხვევაში ცხადია, რომ (1.1) განტოლების ყველა ამონახსნი რხევადია.

თეორემა 3.2. ვთქვათ სრულდება (3.1),

$$\liminf_{k\to+\infty}\ p(j)>0 \tag{3.7}$$

და

$$\min\left\{\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=\tau_i(j)}^{k}(1+m\alpha^{1/m}p^{1/m}(j))}{\alpha}:\alpha\ge 1\right\}>1 \tag{3.8}$$

მაშინ (1.1) განტოლება რხევადია, სადაც p მიიღება (2.5)-დან.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ (.1) განტოლებას აქვს არარხევადი ამონახსნი. მაშინ (3.7), (3.8) და ლემა 2.2-ის თანახმად სრულდება (2.10). (3.1) და (3.8) ის თანახმად მოიძებნება ისეთი M>0 ისეთი, რომ დიდი k-თვის გვაქვს

$$\prod_{\ell=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{m}\sum_{s=\sigma_{\ell}(k)}^{k}p_i(s)\prod_{j=\tau_i(s)}^{\sigma_i(k)-1}(1+mp^{1/m}(j)M)\right)^{1/m}>\frac{2}{m^m}. \tag{3.9}$$

სხვა შემთხვევაში (2.10) ტოლობის თანახმად არსებობს $s_0\in N$ და $k_0\in N$ ისეთი, რომ $\psi_{s_0}(k)\geq M$ სადაც $k\geq k_0$. (3.9) უტოლობიდან სრულდება (3.2) სადაც $s=s_0$, ეს კი ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 3.2. ვთქვათ დიდი $j\in N$ -თვის

$$p_i(j)\geq p(j)>0 \qquad i=1,\dots,m \tag{3.10}$$

და

$$\bar{p}\liminf_{k\to+\infty}\frac{\left(m+\sum_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))\right)^{m+\sum_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))}}{\left(\sum_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))\right)^{\sum_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))}}>1. \tag{3.11}$$

მაშინ (1.1) განტოლება რხევადია, სადაც $\bar{p}=\prod_{i=1}^{m}p_i$.

შენიშვნა 3.1. ვიგულისხმოთ, რომ

$$\limsup_{k\to+\infty}p_i(k)<+\infty, \qquad (i=1,2,\dots m).$$

სხვა შემთხვევაში ცხადია, რომ (1.1) განტოლების ყველა ამონახსნ რხევადია.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (3.8). მართლაც (3.10)-დან დიდი k-თვის გვაქვს

$$\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=\tau_i(k)}^{k}(1+m\alpha^{1/m}p^{1/m}(j))}{\alpha}\geq\frac{\liminf\limits_{k\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{m}(1+m\alpha^{1/m}p^{1/m})^{(k-\tau_i(k))+1}}{\alpha}=$$

$$\liminf_{k\to+\infty}\frac{\left(1+m\alpha^{1/m}p^{1/m}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))+m}}{\alpha}\geq$$

$$\geq\liminf_{k\to+\infty}\left\{\min\frac{\left(1+m\alpha^{1/m}p^{1/m}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))+m}}{\alpha}:\alpha\geq1\right\}, \qquad (3.12)$$

რადგან

$$\min_{\alpha\geq1}\frac{\left(1+m\alpha^{1/m}p^{1/m}\right)^{m+\sum\limits_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))}}{\alpha}=\frac{p\left(m+m\alpha^{1/m}p^{1/m}\right)^{m+\sum\limits_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m}(k-\tau_i(k))}}, \qquad (3.13)$$

(3.12) და (3.13) უტოლობების თანახმად სრულდება (3.11). ამით შედეგის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

შედეგი 3.3. ვთქვათ $n_i\in N$, $i=1,\dots,m$, დიდი $k\in N-$თვის

$$\tau_i(k)\leq k-n_i,\qquad n_i\in N,\qquad p_i(k)\geq p_i>0\qquad (i=1,2,\dots,m) \qquad (3.14)$$

და

$$\frac{\overline{p}\left(m+\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^{m+\sum_{i=1}^{m} n_i}}{\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^{\sum_{i=1}^{m} n_i}} > 1. \qquad (3.15)$$

მაშინ (1.1) განტოლება რხევადია, სადაც $\overline{p} = \prod_{i=1}^{m} p_i$.

დამტკიცება. რადგან $\frac{(m+x)^{m+x}}{x^x}$ ფუნქცია არაკლებადია, (3.14) და (3.15) პირობების თანახმად (3.8) პრობა სრულდება. ეს კი ამტკიცებას თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 3.4. ვთქვათ $n_i \in N, \quad i = 1,\dots,m,$ დიდი $k \in N -$თვის (3.14) სრულდება და

$$\overline{p}\sum_{i=1}^{m} n_i > \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^{1+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i}}{\left(m+\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^{1+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i}}.$$

მაშინ (1.1) განტოლება რხევადია, სადაც $\overline{p} = \prod_{i=1}^{m} p_i$.

შენიშვნა 3.2. ცხადია რომ

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{m+\sum_{i=1}^{m} n_i}\right)^{1+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i} \to \frac{1}{e} \qquad \text{როცა} \qquad \sum_{i=1}^{m} n_i \to +\infty .$$

შენიშვნა 3.3. თუ (3.14) პირობა სრულდება და $m=1$, მაშინ შედეგი 3.4 არის თეორემა 7.5.1 [2].

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს მიღებული შედეგების მნიშვნელობას.

მაგალითი 3.1. განვიხილოთ სხვაობიანი განტოლება

$$\Delta u(k) + p(k)u(k-1) = 0$$

მაშინ (7.5.2)[2] პირობა შეიცველაბ პირობით

$$\liminf_{k\to+\infty} p(k) > \frac{1}{4} \tag{3.16}$$

და (3.8) პირობა შეიცვლება შემდეგი პირობით

$$\liminf_{k\to+\infty}\left(\sqrt{p(k-1)} + \sqrt{p(k)}\right)^2 > 1. \tag{3.17}$$

ცხადია, რომ (3.16) პირობა გამომდინარეობს (3.17) პირობიდან.

სხვა შემთხვევაში როცა $\varepsilon \in (0;\frac{1}{4}]$, $p(2k) = \varepsilon \quad p(2k+1) = 1-\varepsilon \quad (k = 1,2,\ldots)$ მაშინ (3.17) პრობა სრულდება, მაგრამ არ სრულდება (3.16) პირობა.

ლიტერატურა

1. Ladas, G.; Philos, Ch. G.; Sficas, Y. G. Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations. J. Appl. Math. Simulation 2 (1989), no. 2, 101–111.

2. Gy¨ori, I.; Ladas G., Oscillatuin theory of delay differential equations with applications. Clarendon Press Oxford (1991).

3. Chatzarakis, George E.; Koplatadze, Roman; Stavroulakis, Ioannis P. Optimal oscillation criteria for first order difference equations with delay argument. Pacific J. Math. 235 (2008), no. 1, 15–33.

4. Koplatadze, R.; Pinelas, S. Oscillation criteria for first-order linear difference equation with several delay arguments. translated from Nelnn Koliv. 17 (2014), no. 2, 248–267, J. Math. Sci. (N.Y.) 208 (2015), no. 5, 571–592.

5. Koplatadze, R. G.; Chanturiya, T. A. Oscillating and monotone solutions of firstorder differential equations with deviating argument. (Russian) Differentsialnye Uravneniya 18 (1982), no. 8, 1463–1465, 1472.

6. Koplatadze, R.; Kvinikadze, G. On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations. Georgian Math. J. 1 (1994), no. 6, 675– 685.

7. Grammatikopoulos, M. K.; Koplatadze, R.; Stavroulakis, I. P. On the oscillation of solutions of first order differential equations with retarded arguments. Georgian Math. J. 10 (2003), no. 1, 63–76.

8. Berikelashvili, G. K.; Dzhokhadze, O. M.; Koplatadze, R. G. On an approach to the investigation of the asymptotic properties of solutions of first-order ordinary differential equations with delay. (Russian) translated from Differ. Uravn. 44 (2008), no. 1, 19–38, 141, Differ. Equ. 44 (2008), no. 1, 19–39.

9. Infante, G.; Koplatadze, R.; Stavroulakis, I. P. Oscillation criteria for differential equations with several retarded arguments. Funkcial. Ekvac. 58 (2015), no. 3, 347–364. 10. Koplatadze, R. Specific properties of solutions of first order differential equations with several delay arguments. translated from Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. 50 (2015), no. 5, 24–33, J. Contemp. Math. Anal. 50 (2015), no. 5, 229–235.

11. Koplatadze, R. On asymptotic behavior of first orger difference equations with several delay. Bulletin of TICMI 21 (2017), no. 2, 1–5.