ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნათელა ბოხაშვილი

დისკრეტული სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთი ამოცანა

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური

ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: ბესარიონ დოჭვირი, ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი,თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის
ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2018

IVANE JAVAKHISHVILI STATE UNIVERSITY

Natela Bokhashvili

Some problems of Discrate Stochastic Finanacial Mathematics

Applied Mathematics

A thesis presented for the academic degree of Master

Supervisor: Besarion Dochviri, Doctor of physico-Mathematical Sciences. Associate professor of Exact and Natural Sciences of Ivane Javakhishvili State University

Tbilisi 2018

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

ნაშრომში განხილულია სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის პრობლემატიკა დისკრეტული დროის შემთხვევაში. კერძოდ მოტანილია ფინანსური (B,S) -ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში, ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასდადების ამოცანების გადაწყვეტა; თვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის განხილულია ფინანსური ბაზრის უარბიტრაჟობის და სისრულის საკითხები.

კვლევით ნაწილში შესწავლილია დისკრეტული,მრავალაქტივიანი ფინანსური (B,S) ბაზრის ერთი კონკრეტული მოდელი K რაოდენობის ობლიგაციითა და ერთი აქციით. ამ შემთხვევაში საპროცენტო განაკვეთი დამოკიდებულია დროზე, რომლის საშუალებითაც აიგება რისკ-ნეიტრალური მარტინგალური ზომა.დადგენილია დამოკიდებულება მარტინგალურ ზომას, ფინანსური ბაზრის არბიტრაჟულობას და სისრულეს შორის; ამ დამოკიდებულებიდან გამომდინარე შედეგები ცნობილია სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ფუნდამენტური თეორემების სახელწოდებით; განხილულია ევროპული ოფციონის ფასდადების ორნაბიჯიანი ამოცანა.

Annotation

In this paper is considered the problems of stochastic financial mathematics in case of discrete times. In particular, in case of binomial model of financial (B, S) –market, it deals with the solution of the European and American types of Options Pricing Tasks; For self-financing strategies, the financial market's negativity and integrity issues are discussed.

In the research section one particular model of the discrete financial market with k bonds one stock is studied. The interest rate dependent on time and related martingale measure are constructed. The relationship between martingale measure, arbitrage and completeness of financial market is established, results derived from those relations are known as fundamental theorems of stochastic financial mathematics. An illustrative two-step numerical example of calculation of the European call option is given.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

სამყაროში ყველაფერი იცვლება სივრცესა და დროში. ეს ცვლილებები როგორც წესი, შემთხვევით ხასიათს ატარებს. მაგალითისთვის შეიძლება დავასახელოთ კარგად ცნობილი ბროუნის მოძრაობა, ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, სამედიცინო, ფსიქოლოგიური, სოციოლოგიური და სხვა სახის ცდების შედეგები, ნებისმიერი ეკონომიკური მაჩვენებელი, ფინანსური ნაკადების მახასიათებლები და უამრავი სხვა ცვლადი სიდიდე. საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ შემთხვევითი ხასიათის ცვლადი სიდიდის (შემთხვევითი სიდიდის) ცხადი ანალიზური წარმოდგენა ფუნქციის სახით ჩვენ არ შეგვიძლია, რადგან შეუძლებელია ცალსახად წინასწარ განვსაზღვროთ, თუ რა მნიშვნელობას მიიღებს ცდის შედეგად ასეთი ცვლადი სიდიდე. ამიტომ ამ ცვლადების ყოფაქცევის ანუ ბუნებაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესების შესწავლა და ანალიზი არსებითად ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებით ხდება, რომლის საგანი სწორედ ამ პროცესების მათემატიკური ანალიზია. ასეთი მიდგომა გამოიყენება დღეს მეცნიერული კვლევისა და პრაქტიკული საქმიანობის თითქმის ყველა სფეროში.

კარგად არის ცნობილი, რომ თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტი ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით, მაგალითად: ობლიგაციებით, აქციებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. თავის მხრივ, ეს საკითხები მიეკუთვნება ფინანსების თეორიას, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს ბოლო ათწლეულებში ინტენსიურად განვითარებადი სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. შევნიშნავთ, რომ ასევე გარკვეულ რისკებთან არის დაკავშირებული სადაზღვევო საქმე, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას შეისწავლის სადაზღვევო (აქტუალური) მათემატიკა. შევნიშნავთ, რომ ფულად-საკრედიტო პოლიტიკის მართვაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს საბანკო (საფინანსო) და სადაზღვევო ინსტიტუტების ერთობლივ საქმიანობას. ფინანსური ბაზრების სტრუქტურა საკმაოდ რთული ბუნებისაა და მისი ანალიზი დაკავშირებულია საინტერესო და მეტად რთულ მათემატიკურ ამოცანებთან. ასეთი ამოცანებია, მაგალითად, დროში დისკრეტულად და უწყვეტად ფუნქციონირებადი ფინანსური ბაზრების მოდელების შერჩევა და მასში შემავალი

პარამეტრების სტატისტიკური შეფასება, აქციებისა და სხვა აქტივების ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების (მაგალითად, ოფციონის, ფორვარდის, ფიუჩერსის) სამართლიანი ფასის დადგენა, ინვესტორის ოპტიმალური სტრატეგიის აგება, საინვესტიციო პრობლემა, არბიტრაჟი და მრავალი სხვა. ამ ამოცანების გადაწყვეტა სწორედ ალბათურ - სტატისტიკური (სტოქასტური ანალიზის) მეთოდების გამოყენებით ხდება.

ფინანსური მათემატიკა ორი ძირითადი მიმართულებისგან შედგება: პირველი ეს არის დეტერმინისტული ანუ კლასიკური ფინანსური მათემატიკა, ხოლო მეორე- სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.ფინანსური პროცესების აღმწერ დეტერმინისტულ მათემატიკურ მოდელებში იგულისხმება დროში ცვალებადი ფინანსური მახასიათებლების მომავალი მნიშვნელობების სრული განსაზღვრულობა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, გვაქვს ფინანსური ოპერაციების აღმწერი ფორმულები და დროის $n=0$ მომენტში საწყისი მონაცემების საფუძველზე მომავალში დროის ნებისმიერი n მომენტისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ საჭირო მახასიათებლები. მარტივი და რთული პროცენტების გამოყენებით ასეთი გამოთვლები დაკავშირებულია,მაგალითად ვექსელებთან,ობლიგაციებთან, დეპოზიტურ სერთიფიკატებთან და სხვა სავალო ფინანასურ ინსტრუმენტებთან, აგრეთვე ფინანსურ მენეჯმენტთან და სხვა.

რეალურ ფინანსურ ოპერაციებს, როგორც წესი, თან ახლავს გარკვეული რისკი და განუსაზღვრელობა, რომელიც ამ ოპერაციების მახასიათებლებზე უამრავი შემთხვევითი ფაქტორის (მაგალითად ინფლაციის,ეკონომიკური კრიზისის, ბუნებრივი კატასტროფების) ზეგავლენით არის გამოწვეული. ამ შემთხვევაში მახასიათებლების დროში მომავალი მნიშვნელობების ცალსახად განსაზღვრა შეუძლებელია. სწორედ ამ შემთხვევითი ფაქტორების გათვალისწინებით ხდება ფინანური ნაკადების მახასიათებლების შესწავლა და ანალიზი ფინანსური პროცესების აღმწერ სტოქასტურ მათემატიკურ მოდელებში.

ფინანსური სამყარო მთლიანობაში საკმაოდ რისკიანია, მისი მდგომარეობა სტაბილურობის თვალსაზრისით უამრავ ფაქტორზეა დამოკიდებული, რაც დროდადრო იწვევს კრიზისულ სიტუაციას და კრახსაც კი. ასე მაგალითად, 1987 წლის ბოლოს დოუ ჯონსის ინდექსი DJIA მკვეთრად დაეცა, რის გამოც ინვესტორებმა „ ყველაფრის დაკარგვის“ შიშით თავიანთი აქციების ფინანსურ ბაზრებზე გამოტანა და მასიური გაყიდვა დაიწყეს. მაგალითისთვის საინტერესოა მოვიყვანოთ შემდეგი მონაცემები: NYSE ბირჟაზე 1987 წლის იანვარში ყოველდღიურ ბრუნვაში მონაწილეობდა დაახლოებით 300

მილიონი აქცია, კრახის დღეს კი-1987 წლის 19 ოქტომბერს ბრუნვაში იყო უკვე 604 მილიონი აქცია, ხოლო 20 ოქტომბერს ამ რიცხვმა 608 მილიონი შეადგინა. ეს გამოიწვია იმან, რომ 1987 წლის 19 ოქტომბერს 1986 წლის 31 დეკემბერთან შედარებით DJIA ინდექსი 22.6%-ით დაეცა, რამაც აბსოლიტურ ფინანსურ გამოსახულებაში 500 მილიარდი ამერიკული დოლარი შეადგინა.

ფინანსური კრიზისის ერთ-ერთი ძირითადი გამომწვევი ფაქტორია ინფლაცია-ფასების საერთო დონის ზრდა, რომელიც არსებით გავლენას ახდენს მაკროეკონომიკაზე. ინფლაცია ფასების ინდექსით იზომება და ურთულესი მათემატიკური მოდელებით აღიწერება. ინფლაცია ფასების ინდექსით იზომება და ურთულესი მათემატიკური მოდელებით აღიწერება. ინფლაციის სათანადო მართვა სპეციალისტებისთის მუდმივ თავსატეხს წარმოადგენს. საინტერესოა აღვნიშნოთ ზოგიერთი ფაქტი: მაგალითად, გერმანიაში 1923 წელს ფასების დონე დაახლოებით 10^{12}-ჯერ გაიზარდა, ამასთან ინფლაცია ისე სწრაფად იზრდებოდა, რომ რეტორანში სადილის შემდეგ ორჯერ მეტი თანხა იყო გადასახდელი, ვიდრე სადილის შეკვეთის დროს. ინფლაციის რეკორდული ტემპი უნგრეთში დაფიქსირდა 1946 წლის აგვისტოში, როდესაც ფასების დონე დაახლოებით 10^{25}-ჯერ გაიზარდა. შევნიშნოთ ,რომ საქართველოში 1990-იან წლებში ეროვნული ვალუტის-ლარის შემოღებამდე ბრუნვაში იყო სრულიად გაუფასურებული მილიარდობით კუპონი. აგრეთვე, გვინდა შევნიშნოთ ,რომ სხვადასხვა ობიექტურმა თუ სუბიექტურმა მიზეზებმა 2008 წელს გამოიწვია მსოფლიო ფინანსური კრიზისი, რომელმაც უამრავი სახის უარყოფითი გავლენა იქონია თითქმის ყველა ქვეყანაზე და ცხადია, საქართველოზეც. ანალოგიური შედეგები მოიტანა 2016 წელს ლარის კურსის დაცემამ დოლარის კურსთან მიმართებაში.

სიამოვნებით გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ქართველ მეცნიერთა მიერ ბოლო ათწლეულებში საკმაოდ ნაყოფიერად მიმდინარეობს ფუნდამენტური გამოკვლევები ფინანსურ და სადაზღვევო მათემატიკაში. ამ მიმართულებით დაცულია საკანდიდატო და სადოქტორო დისერტაციები. ქართველ მეცნიერებს მონაწილეობა აქვთ მიღებული მრავალ საერთაშორისო სიმპოზიუმსა და კონფერენციაში. გამოქვეყნებულია სამეცნიერო ნაშრომები სამამულო და უცხოურ პრესტიჟულ ჟურნალებში, მოპოვებულია გამარჯვებები სხვადასხვა კონკურსებში და მიღებულია გრანტები. გვინდა შევნიშნოთ, რომ სამწუხაროდ საქართველოში არსებული ამ მძლავრი სამეცნიერო პოტენციალი

გამოყენება რეალური ამოცანებია და პრობლემების გადაწყვეტაში ჯერჯერობით სათანადოდ არ ხდება.

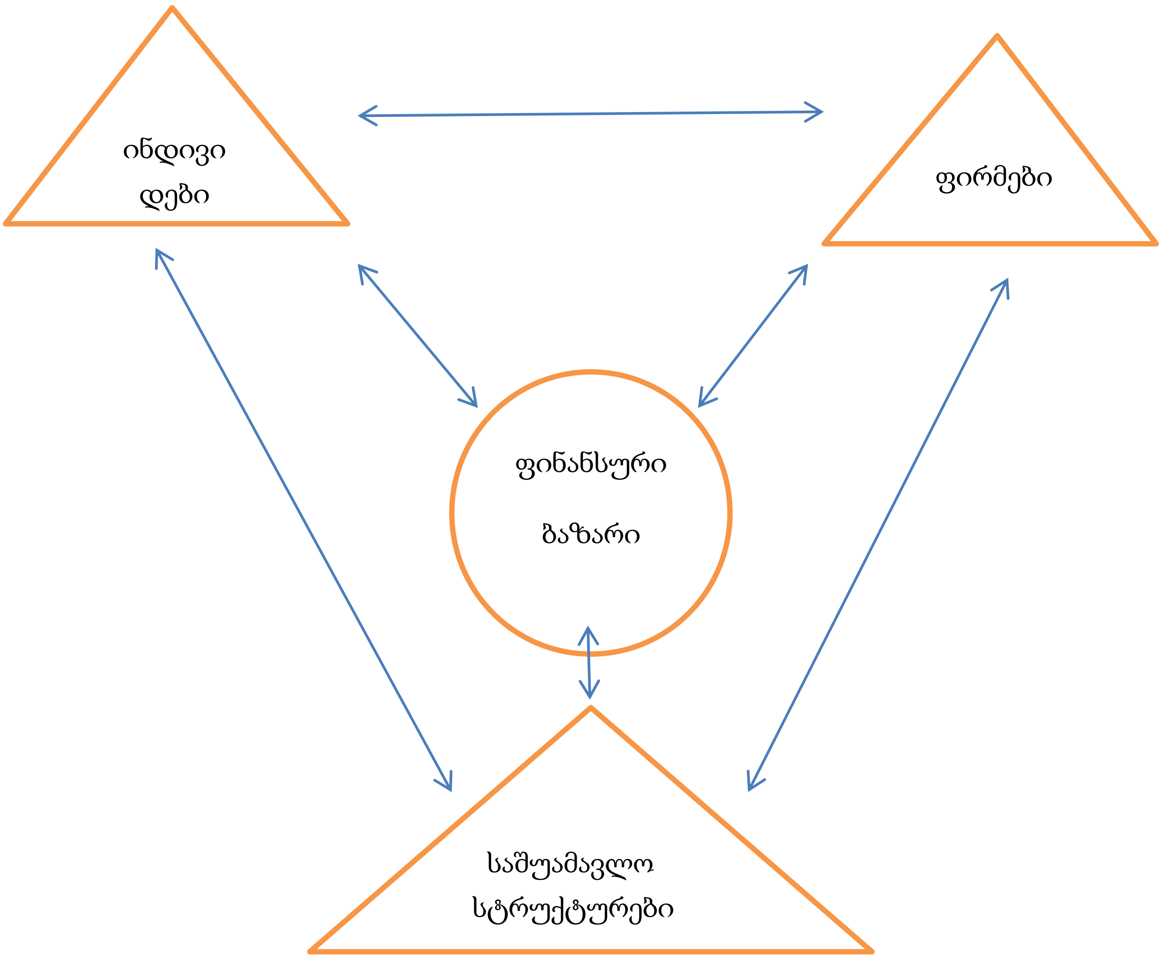
XX საუკუნის ბოლოს საქართველო დაადგა საბაზრო ეკონომიკის განვითარების გზას. ამან ბუნებრივად გამოიწვია უამრავი სოციალურ-პოლიტიკური, ეკონომიკური, მეცნიერული, პედაგოგიური და სხვა შეხედულებების ახლებურად გააზრებისა და ჩამოყალიბების აუცილებლობა. ჩვენი აზრით, უმთავრესია ქვეყანაში სწავლებისა და კადრების აღზრდის მეთოდების მუდმივი გაუმჯობესება და განვითარება ჩვენი რეალობის, ცოდნისა და გამოცდილების გათვალისწინებით.

თავი 1 .შესავალი დეტერმინისტულ და სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში

იხ.ნაშრომები: [2,თავი]; [4,ლექცია 1]; [3, ლექცია 1,2]

1.1. ფინანსური ბაზრის ფუნქციონირების სქემა. ბინომური მოდელი

ა) განიხილავენ შემდეგ საკვანძო ობიექტებსა და სტრუქტურებს: ინდივიდები, ფირმები, საშუამავლო სტრუქტურები, ფინანსური ბაზრები. ამ ობიექტებსა და სტრუქტურებს შორის კავშირი მოიცემა შემდეგი ბლოკ-სქემით:



ნახაზი 1.1. ფინანსური ბაზარი, ობიექტები და სტრუქტურები

1) ინდივიდების, როგორც მომხმარებლების ამოცანაა: „ მეტი მოიხმაროს ახლა“, ხოლო ინვესტორის ამოცანაა: „ ახლა განახორციელოს ინვესტირება ისე, რომ მომავალში ჰქონდეს მეტი“.

2) ფირმებს(კომპანიებს, კორპორაციებს,...) გააჩნია ისეთი ფასეულობები, როგორიცაა: „მიწა“, „ქარხნები“, „მანქანები“, „ორგანიზაციული სტრუქტურები“, „ბაზრები“,პატენტები და სხვა. მრავალი სახის საქმიანობასთან ერთად ფირმები კაპიტალის გაზრდის მიზნით უშვებენ ობლიგაციებს, აქციებს.

3) საშუამავლო სტრუქტურებს (ფინანსურ საშუამავლო სტრუქტურებს) წარმოადგენს ბანკები, საინვესტიციო კომპანიები, საპენსიო ფონდები, სადაზღვევო კომპანიები და სხვა.

4) ფინანსური ბაზარი წარმოადგენს ფულის, ვალუტის, ძვირფასი (კეთილშობლი მეტალების), ფასიანი ქაღალდების და სხვა აქტივების ბაზრების ერთობლიობას. ძირითადი (საბაზისო) ფასიანი ქაღალდებია: საბანკო ანგარიში, ობლიგაცია, აქცია. ხოლო წარმოებული ფასიანი ქაღალდებია: ოფციონი, ფიუჩერსი, ვარანტი, სვოპი, სპრედი და სხვა. ფინანასური ინჟინერიის დანიშნულება მდგომარეობს წარმოებული ფასიანი ქაღალდებით, როგორც ფინანსური ინსტრუმენტებით, ოპერაციების ჩატარებასა და ამ ოპერაციებთან დაკავშირებული რისკების გარკვეულ განეიტრალებაში. შევნიშნავთ, რომ სიტყვა „ წარმოებულის“ შინაარსი შემდეგია: წარმოებული ფასიანი ქაღალდი წარმოადგენს გარკვეული სახის კონტრაქტს ძირითადი ფასიანი ქაღალდის ყიდვა-გაყიდვის შესახებ.

ბ) განვიხილოთ ფინანსური (B,S)=(B_n, S_n) ბაზრის კარგად ცნობილი კოქსის-როსის-რუბინშტეინის დისკრეტული ბიმომური მოდელი:

$$B_n=(1+r)\,B_{n-1}, \qquad B_0>0, \tag{1.1}$$

$$S_n=(1+\rho_n)\,S_{n-1}, \qquad S_0>0, \tag{1.2}$$

რომელიც შედგება ორი აქტივისგან: B=(B_n) საბანკო ანგარიშისგან (ობლიგაციისგან) და S=(S_n) აქციისგან n=0,1,…,N. საპროცენტო განაკვეთი r>0, ხოლო $\rho=(\rho_n)$, არის დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ორი შესაძლო მნიშვნელობით: P($\rho_n = a$) =p>0 , P($\rho_n = b$)=1-p=q. ამასთან -1<a< r<b.

წარმოვიდგინოთ ინვესტორი, რომლის საწყისი კაპიტალი (თანხა) დროის n=0 მომენტში არის X_0=x>0 და მისი ინტერესია გაზარდოს საწყისი თანხა ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გამოყენებით(ობლიგაციებისა და აქციების ყიდვა-გაყიდვით) ისე, რომ მომავალში დროის ფიქსირებულ N მომენტში მას ჰქონდეს გარკვეული f_N>0 თანხა. ინვესტორის ამ სურვილს საინვესტიციო პრობლემა ეწოდება.

თუ ინვესტორი საწყის თანხას განალაგებს მხოლოდ საბანკო ანგარიშზე (ობლიგაციებში), მაშინ საინვესტიციო პრობლემის გადასაწყვეტად მას დროის n=0 მომენტში უნდა გააჩნდეს საწყისი კაპიტალი

X_0 =x=$(1+\mathrm{r})^{-N}. f_N$

თუ ინვესტორი საწყის თანხას განალაგებს მხოლოდ აქციებში(იყიდის მხოლოდ აქციებს), მაშინ საინვესტიციო პრობლემის გადასაწყვეტად მას უნდა გააჩნდეს საწყისი კაპიტალი

X_0 =x=$[1(bp+aq)]^{-N}. f_N$

ინვესტორს აქვს მესამე ვარიანტიც. ვთქვათ, n=0 მომენტში ობლიგაციის ფასი არის B_0, ხოლო აქციის ფასი არის S_0 და ვიგულისხმოთ, რომ ინვესტორმა საწყისი თანხის ნაწილით იყიდა β_0 ობლიგაცია და ნაწილით γ_0აქცია. მაშინ მისი საწყისი კაპიტალი შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$X_0 = X_0^{\pi} = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$,

სადაც $\pi=\pi_0=(B_0, \gamma_0)$ წყვილი არის საინვესტიციო პორტფელი ანუ სტრატეგია.

$\pi=\pi_0=(B_0, \gamma_0)$, n=0,1,…,N, სტრატეგიას ეწოდება ჰეჯი, თუ $X_N^{\pi} \geq f_N$ და ეწოდება მინიმალური ჰეჯი თუ $X_N^{\pi} = f_N$. ამრიგად, საინვესტიციო პრობლემის გადასაწყვეტად ამ შემთხვევაში საჭიროა ისეთი $\pi^* = \pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ სტრატეგიის აგება, რომლისთვისაც დროის ბოლო N მომენტში შესრულდება ტოლობა:

$\mathrm{X}_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n = f_N$.

1.2. ფინანსური ნაკადები,საბანკო ანგარიშები

ა) ფინანსური (ფულადი) ნაკადები მნიშვნელოვნად გამოიყენება საბანკო ოპერაციების ანალიზში.

1) პირველი რიგის ფინანსური ნაკადი CF={$(t_{k,}C_{t_k})$}, k=0, 1...n; წყვილების ერთობლიობა, სადაც $t_{k,}$ დროის მომენტებია, ხოლო C_{t_k} არის ამ მომენტებში შეტანილი (გატანილი) თანხის რაოდენობა. CF ნაკადის α რიცხვზე ნამრავლი ჩაიწერება ასე: αCF= {$(t_{k,}\alpha C_{t_k})$}, k=0,1,…n თუ გვაქვს ორი ნაკადი CF_1={$(t_i^{(1)}, C_{t_i}^{(1)})$}, i=0,1,….m და CF_2={$(t_k^{(2)}, C_{t_k}^{(2)})$}, k=0,1,….n; მაშინ მათი ჯამი $CF_1 + CF_2$ შედგება შემდეგი სიდიდეებისგან: ა) პირველ და მეორე ნაკადებში არსებული ,განსხვავებულ დროის მომენტებში არსებული წყვილებისგან, ბ) დროის ტოლ მომენტებში თანხების ჯამისგან. თუ ეს ჯამი ნულის ტოლია,მაშინ იგი ჯამში არ ჩაიწერება.

2)მეორე რიგის ფინანსური ნაკადი $\overline{CF}$={$(I_{k,}C_k)$}, k=1,2…n; სადაც $I_{k,} = [t_{k-1,}t_{k,})$ თანაუკვეთი დროის ინტერვალებია, ხოლო C_k არის ინტერვალში არსებული თანხა. ხშირად $\overline{CF}$ ნაკადი ჩაიწერება $\overline{CF}$ ნაკადის ორი სახით, რასაც აქტუალიზაცია ეწოდება: ავანსირებული და ფინალიზირებული ნაკადები, ესენია შესაბამისად Adv ($\overline{CF}$)={($t_{k-1,}C_k$)}, Fin (CF) = {($t_{k,}C_{t_k}$)}, k=0, 1...n;

3) თუ $\overline{CF}$ ნაკადში დროის ინტერვალების სიგრძეები ტოლია, მაშინ ამ ნაკადს რენტა ეწოდება. ხდება რენტი ცალკეული წყვილები ან მთლიანად რენტის p-ჯერადი დაყოფა მიკრორენტად: $D^{(p)}(\overline{CF})$ რაც ნიშნავს შემდეგს: დროითი ინტერვალები და შესაბამისი თანხები იყოფა p-ნაწილად. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\mathrm{Adv}(\mathrm{D}^{(p)}(\overline{CF})) = \mathrm{D}^{(p)}\,(\mathrm{Adv}(\overline{CF})), \qquad (1.3)$$

$$\mathrm{Fin}\,(\mathrm{D}^{(p)}(\overline{CF})) = \mathrm{D}^{(p)}(\,\mathrm{Fin}(\overline{CF})). \qquad (1.4)$$

ბ) ბანკში შეტანილ საწყის B_0 თანხაზე ხდება სხვადასხვა სახის პროცენტის (სარგებლის) დარიცხვა დროის n-ერთეულში (მაგალითად თვე, წელიწადი)

1) მარტივი წესით დარიცხვა

$$B_n = B_0(1+nr), \qquad (1.5)$$

2) რთული წესით დარიცხვა

$$B_n = B_0(1+r)^n \qquad (1.6)$$

3) წელიწადში m-ჯერ რთული წესით დარიცხვა

$$B_n(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mn}$$

4) წელიწადის წილად მნიშვნელობებში m-ჯერ რთული წესით დარიცხვა

$$B_{n+\frac{k}{m}}(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{m(n+\frac{k}{m})}$$

5) წელიწადში უწყვეტად რთული წესით დარიცხვა

$$B_n(\infty) = B_0 e^{r(\infty)n}$$

ამასთან, $B_n(m) \to B_n(\infty)$, როცა $r(m) \to r(\infty)$, $m \to \infty$.

6) მარტივი ნომინირებული საპროცენტო განაკვეთი

$$i = \frac{r}{n}; \quad r = \frac{B_n - B_{n-1}}{B_n}$$

7) მარტივი სააღრიცხვო განაკვეთი

$$w = \frac{B_n - B_{n-1}}{B_n}$$

8) მარტივი ნომინირებული სააღრიცხვო განაკვეთი

$$d = \frac{w}{n}$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

w=$\frac{r}{1+r}$, d=$\frac{i}{1+in}$

1.3. ობლიგაცია, აქცია და მისი მახასიათებლები

ა) ობლიგაცია (ბონი) არის ვალდებულება ფასიანი ქაღალდის სახით, რომელსაც უშვებს სახელმწიფო, ბანკები, კორპორაციები, სააქციო კომპანიები და სხვა ფინანსური ინსტიტუტები კაპიტალის აკუმულაციის (მოზიდვის) მიზნით. ობლიგაციის ძირითადი პარამეტრებია:

(1) P(T,T) - ნომინალური ღირებულება, ანუ ობლიგაციის სიცოცხლის ხანგრძლივობის ბოლო მომენტში გადასახდელი თანხა,
(2) T - ობლიგაციის დაფარვის დრო,
(3) r_c - დივიდენდები ანუ საკუპონე დარიცხვის პროცენტი,
(4) P(0, T) - ობლიგაციის საწყისი ფასი,
(5) P(t, T) - დროის t მომენტში ობლიგაციის საბაზისო ფასი,
(6) r_c(t, T) - მიმდინარე საპროცენტო განაკვეთი:

$$r_c(t,T) = \frac{r_c \cdot P(T,T)}{P(t,T)}$$

(7) ρ(T-t, T) - შემოსავალი პროცენტებში დარჩენილ (T-t) დროში, ხოლო თვითონ შემოსავალი ρ განისაზღვრება, როგორც ფესვი შემდეგი განტოლების

$$P(T,T) = \sum_{k=1}^{T-t} \frac{r_c P(T,T)}{(1+\rho)^k} + \frac{P(T,T)}{\left(1+\rho(T-t,T)\right)^{T-t}} \qquad (1.7)$$

სადაც t=1,2,…,T.

ბ) აქცია - ეს არის საქმიანი (საწილო) ფასიანი ქაღალდი, რომელსაც უშვებს კორპორაციები, კომპანიები, ... ; თანხის აკუმულაციისა და გადაზრდის მიზნით. აქციების ორი ძირითადი სახეა: ჩვეულებრივი და პროფესიული აქციები, რომლებიც

ერთმანეთისგან განსხვავდება დივიდენდების გადახდით და აქციების ფლობის რისკის სხვადასხვა ხარისხით.

(1) ლუის ბაშელიემ ექსპერიმენტული მონაცემების ანალიზის საფუძველზე შეამჩნია, რომ აქციის ფასებს $S_t^{(\Delta)}$, $t = 0, \Delta, 2\Delta, \ldots$; გააჩნია ნულოვანი საშუალო ნაზარდები $S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}$ (სტატისტიკური აზრით) და $\left| S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)} \right|$ სიდიდის ფლუქტუაციები არის $\sqrt{\Delta}$ რიგის.

ასეთი თვისება აქვს, მაგალითად, შემთხვევით ხეტიალს

$$S_t^{(\Delta)} = S_0 + \sum_{k \le \left[\frac{t}{\Delta}\right]} \xi_k^{(\Delta)} \tag{1.8}$$

სადაც არის დამოკიდებული და ერთიანად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები:

$$P\left(\xi_k^{(\Delta)} = \sigma\sqrt{\Delta}\right) = P\left(\xi_k^{(\Delta)} = -\sigma\sqrt{\Delta}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \sigma > 0.$$

(2) აქციის ფასები $S_t^{(\Delta)}$ აღიწერება $H_k = h_1 + \cdots + h_k$სიდიდეებით, სადაც

$$h_k = ln \frac{S_k^{(\Delta)}}{S_{k-1}^{(\Delta)}}, \qquad k = 1,2, \ldots; \tag{1.9}$$

(3) როცა $\Delta \to 0$, მაშინ ვღებულობთ აქციის ფასის ევალუციას უწყვეტ დროში:

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \qquad t \ge 0 \tag{1.10}$$

სადაც $W = (W_t)_{t \ge 0}$ არის ვინერის პროცესი (ბროუნის მოძრაობა). ბლეკმა და შოულსმა შემდეგ აქციის ფასების ევოლუციის აღწერისთვის გამოიყენეს ე.წ. გეომეტრიული ანუ ეკონომიკური ბროუნის მოძრაობა:

$$S_t = S_0 exp\left\{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right\} \tag{1.11}$$

1.4. ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასდადების ამოცანა

ა) წარმოებულ ფასიან ქაღალდებს შორის მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ოფციონებს (ოფციონურ კონტრაქტებს), რომელიც ფინანსური ინჟინერიის ინსტრუმენტებს წარმოადგენს.

განვიხილოთ ფინანსური (B,S) - ბაზრის ბინომური მოდელი (1.1), (1.2). მაგალითისთვის ვთქვათ, გვაქვს ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით:

$$f_N = f(S_N) = max(S_N - k, 0) \tag{1.12}$$

ამ ოფციონის მფლობელს აქვს უფლება იყიდოს აქცია ოფციონის გამომშვებისგან (ემიტენტისგან) მხოლოდ დროის ბოლო N მომენტში. წინასწარ შეთანხმებულ K ფასად. თუ $S_N > K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი იყიდის აქციას K ფასად, მყისვე გაყიდის მას S_N ფასდ და მიიღებს მოგებას $f_N = S_N - K - C_N$, სადაც C_N არის ოფციონის ფასი.

ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანები (ემიტენტის ამოცანები) შემდეგია:

(1) ოფციონის სამართლიანი (გასაყიდი) ფასის დადგენა, ანუ იმ მინიმალური C_N თანხის პოვნა, რომლითაც ემიტენტი შეძლებს ააგოს მინიმალური ჰეჯი $\pi^* = \pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ და საჭიროების შემთხვევაში გადაიხადოს f_N თანხა,

(2) მინიმალური π^* ჰეჯის აგება ანუ β_n^* და γ_n^* კომპონენტების პოვნა,

(3) მინიმალური π^* ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესის ევოლუციის განსაზღვრა

$$X_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n \tag{1.13}$$

ბ) ევროპული ოფციონისგან განსხვავებით ამერიკული ოფციონის მფლობელს მისი განაღდება შეუძლია დროის ნებისმიერ (შემთხვევით) მომენტში n=0,1,...,N. ამიტომ ევროპული ოფციონის ფასდადების სამ ამოცანასთან ერთად ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანაში საჭიროა აგრეთვე განაღდების, გარკვეული აზრით, ოპტიმალური დროის მომენტის არჩევა.

განვიხილოთ ფინანსური (B,S) - ბაზრის ბინომური მოდელი (1.1),(1.2) და გადახდის ფუნქციათა მიმდევრობა:

$$\begin{gathered} f_0 = f_0(S_0)\,, \\ f_1 = f_1(S_0, S_1)\,, \\ - - - - - - - - - - - \\ f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n)\,, \end{gathered} \tag{1.14}$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$f_N = f_N(S_0, S_1, \dots, S_N) \,.$$

მაგალითისთვის ვთქვათ, გვაქვს ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით:

$$f_n = max(S_n - K, 0) \qquad (1.15)$$

ამ ოფციონის მფლობელს აქვს უფლება იყიდოს აქცია ემიტენტისგან დროის ნებისმიერ r შემთხვევით მომენტში, r=0,1,...,N. თუ $S_n > K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი მყისვე იყიდის K ფასად (წინასწარ შეთანხმებულ ფასად), მყისვე გაყიდის მას S_n ფასად და მიიღებს მოგებას $f_n = S_n - K - C_N^A$, სადაც C_N^A არის ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასი, რომელიც შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება

$$C_N^A = \sup_r E^*(1+r)^{-r} \cdot f_r \,, \qquad (1.16)$$

სადაც E^* არის $p^* = \frac{r-a}{b-a}$ ალბათური ზომით გასაშუალება, ხოლო სუპრემუმი აიღება $r \leq N$ გაჩერების მომენტებით. (1.15) სუპრემუმი მიიღწევა ე.წ. რაციონალურ r* მომენტში და განისაზღვრება ტოლობით

$$r^* = min\{n: f_n(S_n) \geq C_n^A\} \qquad (1.17)$$

სადაც C_n^A ამერიკული ოფციონის მიმდინარე ფასია დროის n მომენტში. დროის r* მომენტში განაღდებით ამერიკული ოფციონის მფლობელი მიიღებს მაქსიმალურ საშუალო მოგებას.

1.5. ეფექტური ფინანსური ბაზრის კონცეფცია

ვთქვათ, (B,S)=($B_n S_n$), n=0,1,...,N, არის ორაქტივიანი - საბანკო ანგარიშის და აქციის ბაზარი. ვიგულისხმოთ, რომ ფილტრირებული ალბათური სივრცე $(\Omega, \mathcal{F},\ F) = (\mathcal{F}_n), P)$ შეიცავს აქტივების შესახებ ინფორმაციას $F\ = (\mathcal{F}_n)$ ნაკადის სახით. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ სივრცეზე განვიხილოთ სამი ნაკადი: $F^1 = (\mathcal{F}_n{}^1)$, $F^2 = (\mathcal{F}_n{}^2)$, და $F^3 = (\mathcal{F}_n{}^3)$, რომელიც აქტივების შესახებ ინფორმაციას შეიცავს და ამასთან $\mathcal{F}_n{}^1 \subseteq \mathcal{F}_n{}^2 \subseteq \mathcal{F}_n{}^3$.

ვთქვათ, ყოველი $S = (S_n)$ ფასისთვის მოიძებნება ფასი $B = (B_n)$ და ალბათური ზომა $\hat{P}$, ლოგიკურად ეკვივალენტური P ზომის, ანუ $\hat{P}_n = \hat{P}|\mathcal{F}_n^1$ ეკვივალენტურია $P_n = P|\mathcal{F}_n$ ზომის, $n \geq 1$.

თუ $\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)$ $n \geq 0$ არის $\hat{P}$- მარტინგალი, მაშინ გვაქვს სუსტად ეფექტური ბაზარი,

$$\hat{E}\left(\frac{S_n + 1}{B_n + 1} | \mathcal{F}_n\right) = \frac{S_n}{B_n}.$$

თუ $\frac{S}{B}$ მარტინგალია $F^2 = \left(\mathcal{F}_n{}^2\right)$ ნაკადის მიმართ, მაშინ ბაზარს ეწოდება ნახევრად მკაცრი ეფექტური ბაზარი,თუ $\frac{S}{B}$ მარტინგალია $F^3 = \left(\mathcal{F}_n{}^3\right)$ ნაკადის მიმართ, მაშინ გვაქვს მკაცრად ეფექტური ბაზარი. ფინანსური ბაზრის ეფექტურობა ეფუძნება შემდეგ კონცეფციას:

არ უნდა არსებობდეს იმის შესაძლებლობა, რომ რაიმე აქტივი „სადღაც ვიყიდოთ იაფად“ და „სადღაც გავყიდოთ ძვირად“ (მივიღოთ ურისკო მოგება). სხვანაირად, რომ ვთქვათ, არ უნდა არსებობდეს არბიტრაჟური შესაძლებლობა.

ვთქვათ,

$$h_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}, \quad H_n = ln\frac{S_n}{S_0}, \quad (H_n = h_1 + \cdots + h_n). \quad (1.18)$$

არის აქციის (ნორმირებული) ფასები; თუ $(H_n)_{n\geq 1}$ არის მარტინგალი, მაშინ $(h_n)_{n\geq 1}$ არის მარტინგული სხვაობა $(E(h_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0)$ და არაკორელირებული $Eh_{n+m} \cdot h_n = 0\,; m \geq 1$. მაგრამ არაკორელირებულობა კიდევ არ ნიშნავს დამოუკიდებლობას და განიხილავენ სიდიდეს

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n\,, \quad (1.19)$$

სადაც ε_n დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და $\varepsilon_n \sim N(0,1)$, ხოლო $\sigma_n = +\sqrt{Dh_n}$ ფინანსურ ლიტერატურაში σ_n სიდიდეებს გოლატილობა ეწოდება:

ეფექტურად ფუნქციორებადი ფინანსური ბაზრის ერთ-ერთი კონცეფცია სწორედ $(H_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის მარტინგალობის დაშვებაში მდგომარეობს.

ამ შემთხვევაში, როცა ინვესტორები ერიდებიან ბაზრის ინვესტირებას სხვადასხვა მიზეზების გამო, მაშინ ბაზრის ლიკვიდურობა (ფრაქტალობა) კლებულობს და ბაზარი შეიძლება გახდეს არაეფექტური.

თავი 2. აუცილებელი მასალა ალბათობის თეორიიდან

იხილეთ ნაშრომები: [1], თავი I, §3; 8; 9; 10; [9], ლექცია

2.1. პირობითი ალბათობა და პირობითი მათემატიკური ლოდინი დაყოფის მიმართ. შემთხვევითი ხეტიალი

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ - რაიმე სასრული ალბათური სივრცე და $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ შემთხვევითი ხდომილებაა. $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ ხდომილობის პირობითი ალბათობა $P(A|B)$ განისაზღვრება ტლობით

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0 \qquad (2.1)$$

$P(A|B)$ პირობით ალბათობას შემდეგი შინაარსი აქვს: ეს არის A ხდომილების ალბათობა, გამოთვლილი იმ პირობით, რომ B ხდომილება უკვე მოხდა. შევნიშნავთ, რომ $P(\cdot|B)$ პირობით ალბათობას $(\Omega \cap B, \mathcal{A} \cap B)$ სივრცეზე, სადაც $\mathcal{A} \cap B = \{A \cap B: \ A \in \mathcal{A}\}$, გააჩნია ყველა ის თვისება, რომელიც აქვს საწყის $P(\cdot)$ ალბათობას $(\Omega, \mathcal{A})$ სივრცეზე.

ვთქვათ, $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ არის Ω სივრცის რაიმე დაყოფა: $\Omega = D_1, \dots, D_k$, $D_i \cap D_j = \phi$ $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$, $P(D_i) > 0$, $i = 1, \dots, k$. $D_i \in \mathcal{A}$ ხდომილობებს ატომები ეწოდება.

1. პირობითი ალბათობა

A ხდომილების პირობითი ალბათობა D დაყოფის მიმართ $P(A|D)$ განისაზღვრება ტოლობით

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^{k} P(A|D_i) I_{D_i} \qquad (2.2)$$

სადაც $I_{D_i} = I_{D_i^{(w)}}$ არის D_i ხხდომილობის (სიმრავლის) $I_{D_i} = 1$, როცა $w \in D_i$; და $I_{D_i} = 0$, როცა $w \in D_i$. ამგვარად, $P(A|D)$ არის შემთვევითი სიდიდე, რომელიც იღებს $P(A|D_i)$ შესაძლო რიცხვით მნისვნელობებს D_i; ატომებზე $P(D_i)$ შესაბამისი ალბათობებით. $P(A|D)$-ს განსაზღვრების თანახმად გვაქვს:

$$P(A|\Omega) = P(A)\,,$$
$$P(A+B|D) = P(A|D) + P(B|D)\,, \qquad AB = \emptyset\,,$$
$$EP(A|D) = P(A).$$

ვთქვათ, ახლა $\eta = \eta(\omega)$ შემდეგი სახის შემთხვევითი სიდიდეა:

$$\eta(\omega) = \sum_{j=1}^{k} y_j I_{D_j^{(\omega)}}\,,$$

სადაც ატომები $D_j = \{\omega\colon \eta(\omega) = y_j\}$. $D_\eta = \{D_1, \dots, D_k\}$ დაყოფას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდით წარმოქმნილი დაყოფა. ამასთან დაკავშირებით ხშირად გამოიყენება აღნიშვნებით: $P(A|D_\eta) = P(A|\eta)$; $P(A|D_i) = P(A|\eta = y_j)$, სადც $D_j = \{\omega\colon \eta(\omega) = y_j\}$. ხშირად გამოიყენება აგრეთვე ანალოგიური შინაარსის დაყოფა: $D_{\eta_1,\dots,\eta_m}$.

ვთქვათ, $\xi = \xi(\omega)$ არის შემდეგი სახის შემთხვევითი სიდიდე

$$\xi(\omega) = \sum_{j=1}^{i} x_j I_{A_j}\,, \qquad A_j = \{\omega\colon\ \xi = x_j\}$$

და $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ - რაიმე დაყოფაა. ξ-ს მათემატიკური ლოდინი განისაზღვრება ტოლობით

$$E\xi = \sum_{j=1}^{i} x_j\, P(A_j) \qquad (\ 2.3)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ξ-ს პირობითი მათემატიკური ლოდინი D დაყოფის მიმართ:

$$E(\xi|D) = \sum_{j=1}^{i} x_j\, P(A_j|D) \qquad (2.4)\,.$$

შევნიშნოთ, $E(\xi|D)$-ს განსაზღვრება შეიძლება შემდეგნაირად შემოვიტანოთ: ჯერ განვსაზღვროთ პირობითი მათემატიკური ლოდინი D_i, $i = 1, \dots, k$, ხდომილობის მიმართ

$$E(\xi|D_i) = \sum_{j=1}^{i} x_j\, P(A_j|D_i) \qquad (2.5)$$

ხოლო მისი საშუალებით განვსაზღვროთ $E(\xi|D)$ ტოლობით

$$E(\xi|D) = \sum_{i=1}^{k} E(\xi|D_i) I_{D_j^{(\omega)}}\,.$$

ამრიგად, $E(\xi|D)$ არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც იღებს $E(\xi|D_i)$ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობებს D_i; ატომებზე $P(D_i)$ შესაბამისი ალბათობით.

(1) $E(\xi|D)$ ზოგიერთი თვისება შემდეგია:

(2) $E\big((a\xi + b\eta)|D\big) = aE(\xi|D) + bE(\eta|D)$, a, b - მუდმივებია,

(3) $E(\xi|\Omega) = E\xi$,

(4) $E(C|D) = C$, C - მუდმივია,

(5) $E\,E(\xi|D) = E\xi$,

(6) ვთქვათ, η არის D-ზომადი: იღებს მუდმივ მნიშვნელობებს D_i ატომებზე მაშინ

$E\big(\xi_\eta|D\big) = \eta E(\xi|D)$,

$E(\eta|D) = \eta \ \big(E\big(\eta\big|D_\eta\big) = \eta\big)$,

(7) თუ D_2 უფრო „წვრილი" დაყოფაა ვიდრე D_1: $D_1 \subseteq D_2$ $D_1 \ll D_2$, მაშინ სამართლიანი ტელესკოპური თვისება

$$E[E(\xi|D_2)|D_1] = E(\xi|D_1)$$

2. პირობითი დისპრესია

$\xi = \xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდს პირობითი დისპერსია D დაყოფის მიმართ განისაზღვრება ტოლობით:

$$D(\xi|D) = E\left[\big(\xi - E(\xi|D)\big)^2|D\right] \qquad (2.6)$$

$D(\xi|D)$-ს ზოგიერთი თვისება:

(1) $D(\xi|D) = E(\xi^2|D) - [E(\xi|D)]^2$,

(2) $ED(\xi|D) = D\xi - DE(\xi|D)$.

(3) $ED(\xi|D) = E\xi^2 - E[E(\xi|D)]^2$.

(4) ვთქვათ, ერთნაირად განაწილებული $\xi_1, \dots, \xi_n$ და τ - მნიშვნელობებით 1,...,n არის დაოკიდებული შემთხვევითი სიდიდეები, $S_\tau = \xi_1, \dots, \xi_\tau$. მაშინ

$$D(S_\tau|\tau) = \tau D\xi_1$$

3. შემთხვევითი ხეტიალი

განვიხილოთ ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა: $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$; $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = -1) = q$, $p + q = 1$; $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $S_0 = 0$, $1 \le k \le n$. S_k-ს შემთხვევითი ხეტიალი ეწოდება, ხოლო $S_0, S_1, \dots, S_n$ მიმდევრობა განიხილება, როგორც შემთხვევითი ხეტიალის ტრაექტორია, მაგალითად რაიმე ნაწილაკის ტაექტორია, რომელიც გამოდის ნულიდან, თუ $p = q = \frac{1}{2}$, მაშინ გვაქვს სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალი. ამასთან $S_{k+1} = S_k + \xi_k$.

ვთქვათ, A და B ორი მთელი რიცხვია, $A \leq 0 \leq B$. შემთხვევითი ხეტიალის ერთ-ერთი საინტერესო ინტერპრეტაცია შემდეგია. ვთქვათ, ორი მოთამაშის საწყისი თანხებია (-A) და B. თუ $\xi_i = +1$, მაშინ მეორე უხდის პირველს თანხის ერთეულს, ხოლო თუ $\xi_i = -1$, მაშინ პირიქით - პირველი უხდის მეორეს თანხის ერთეულს.

აღვნიშნოთ დიდი n-ენისთვის პირველი და მეორე მოთამაშეების გაკოტრების ალბათობები შესაბამისად $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ სიდიდეებით, როცა პირველის საწყისი თანხაა (x-A), ხოლო მეორის - (B-x); $x \in (A, B)$.

(1) თუ $p \neq q$, მაშინ

$$\alpha(x) = \frac{(q|p)^B - (q|p)^x}{(q|p)^B - (q|p)^A}, \quad \alpha(A) = 1, \quad \alpha(B) = 0,$$

$$\beta(x) = \frac{(q|p)^x - (q|p)^A}{(q|p)^B - (q|p)^A}, \quad \beta(B) = 1, \quad \beta(A) = 0.$$

(2) თუ $p = q = \frac{1}{2}$, მაშინ

$$\alpha(x) = \frac{B - x}{B - A}, \quad \alpha(A) = 1, \quad \alpha(B) = 0,$$

$$\beta(x) = \frac{x - A}{B - A}, \quad \beta(B) = 1, \quad \beta(A) = 0.$$

2.2. მარტინგალები დაყოფის მიმართ. მარკოვის ჯაჭვები

იხილეთ ნაშრომები: [1], თავი II, §6; 7; [4], ლექცია 2;

1. მარტინგალები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ სასრული ალბათური სივრცეა $\{D_K\}$, $k = 1, \dots, n$; არის დაყოფათა მიმდევრობა: $D_1 \leq \dots \leq D_n$. შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას $\xi_1, \dots, \xi_n$ ეწოდება მარტინგალი D_k, $k = 1, \dots, n$; დაყოფათა მიმართ, თუ

ა) ξ_k არის D_k - ზომადი,

ბ) $E(\xi_{k+1}|D_k) = \xi_k$, $1 \leq k \leq n-1$.

ეს ფაქტი აღინიშნება ასე: $\xi = (\xi_k, D_k)$, $k = 1, \dots, n$; ამ შემთხვევაში, თუ $D_k = D_{\xi_1, \dots, \xi_k}$, მაშინ $\xi = (\xi_k, D_k)$ მარტინგალს აღნიშნავენ უბრალოდ ასე $\xi = (\xi_k)$.

თვისებები:

(1) თუ $\xi = (\xi_k, D_k)$ მარტინგალია, მაშინ ყველა k-სთვის.

$$E\xi_k = E\xi_1 \tag{2.7}$$

(2) თუ $\xi = (\xi_k, D_k)$ მარტინგალია და $\tau = \tau(\omega)$ გაჩერების მომენტია D_k დაყოფის მიმართ, $k = 1, \dots, n$: $I_{\{\tau=k\}(\omega)}$ არის D_k - ზომადი, მაშინ

$$E\xi_\tau = E\xi_1 \tag{2.8}$$

(3) ვთქვათ, $\xi_1, \dots, \xi_n$ ბერნულის შემთხევითი სიდიდეებია: $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$, $S_k = \xi_1, \dots, \xi_k$, $D_k = D_{\xi_1,\dots,\xi_k}$. მაშინ $S = (S_k, D_k)$ არის მარტინგალი და სამართლიანია ვალდის ტოლობები:

$$ES_\tau = 0\ ,\ ES_\tau^2 = E\tau \tag{2.9}$$

სადაც r გაჩერების მომენტია D_k-ს მიმართ.

(4) თუ $\xi = (\xi_k, D_k)$ და $\eta = (\eta_k, D_k)$ ორი მარტინგალია, $\xi_0 = \eta_0 = 0$, მაშინ

$$E\xi_k\eta_k = \sum_{k=2}^{n} E\,[(\xi_k - \xi_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1})]\,. \tag{2.10}$$

2. მარკოვის ჯაჭვები

განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi = (\xi, \dots, \xi_n)$ მნიშვნელობებით სასრულ X სიმრავლეში ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება ტოლობა

$$P(\xi_{k+1} = x_{k+1}|\xi_0, \dots, \xi_n) = P(\xi_{k+1} = x_{k+1}|\xi_k)\,. \tag{2.11}$$

გამოვიყენოთ ტოლობა $P(AB|C) = P(A|BC)P(B|C)$. მაშინ (3.5)-დან გვექნება

$$P(\xi_n = x_n, \dots, \xi_{k+1} = x_{k+1}|\xi_0, \dots, \xi_n) = P(\xi_n = x_n, \dots, \xi_{k+1} = x_{k+1}|\xi_k)\,. \tag{2.12}$$

(3.6) ტოლობის ერთ-ერთი ინტერპრეტაცია შემდეგია: რაიმე ნაწილაკის „მომავალი" მდგომარეობა მ=$\{\xi_n = n, \dots, \xi_{k+1} = x_{k+1}\}$ დამოკიდებულია მხოლოდ ნაწილაკის „აწმყო" („ახლანდელ") მდგომარეობაზე ა=$\{\xi_k = x_k\}$ და არ არის დამოკიდებული ნაწილაკის „წარსულ" მდგომარეობაზე წ=$\{\xi_{k-1} = x_{k-1}\,, \dots, \xi_0 = x_0\}$. მაშინ (3.6)-დან გვექნება

$$P(\text{მ}|\text{აწ}) = P(\text{მ}|\text{ა})\,, \tag{2.13}$$

საიდანაც ვპოულობთ

$$P(\text{მწ}|\text{ა}) = P(\text{მ}|\text{ა})P(\text{წ}|\text{ა}) \tag{2.14}$$

სხვანაირად, ფიქსირებული „აწმყოსთვის" (ა) „მომავალი" (მ) და „წარსული" (წ) დამოუკიდებელია. ამ თვისებას ეწოდება მაკროვის თვისება, ხოლო ამ თვისების მქონე $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ მიმდევრობას მაკროვის ჯაჭვი ეწოდება.

მაკროვის ჯაჭვების შესწავლა ხდება ე.წ. გადასვლის ალბათობის გამოყენებით: $\mathrm{p}_k(x, y) = P\{(\xi_k = y)|(\xi_{k-1} = x)\}$. იმ შემთხვევაში, როცა გადასვლის ალბათობები არ არის

დამოკიდებული k-ზე: $p_k(x,y) = p(x,y)$, მაშინ $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ მარკოვის ჯაჭვს ეწოდება ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი.

შევნიშნოთ, რომ მარტივი შემთხვევითი სიდიდე $\xi = \xi(\omega)$ წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, I_{A_k}(\omega)\,, \tag{2.15}$$

სადაც $A_k = \{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$, ხოლო I_{A_k} არის A_k სიმრავლის ინტეგრალი: $I_{A_k} = 1$, როცა $\omega \in A_k$ და $\overline{I_k} = 0$, როცა $\omega \in A_k$. ასეთ შემთხვევაში ξ-ს მათემატიკური ლოდინი განისაზღვრება ტოლობით:

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k) \qquad (\ 2.16\ )\ .$$

შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ $\xi = \eta,\ \xi \geq 0,\ \xi_n \to \xi$, და სხვა ანალოგიური სახის დამოკიდებულებების სამართლიანობა, ჩვენი დაშვებით, სრულდება ერთის ტოლი ალბათობით ანუ თითქმის აუცილებლად, რომელიც $(P_{-a \cdot v \cdot})$ სიმბოლოთი აღინიშნება, მაგალითად $\xi = \eta(P_{-a \cdot v \cdot})$ ნიშნავს: $P\big(\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\big) = 0$.

2.3 .ლებეგის ინტეგრალი. პირობითი მათემატიკური ლოდინი σ-ალგებრის მიმართ.[1]

1.ლებეგის ინტეგრალი

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ რაიმე ალბათური სივრცეა, $\xi = \xi(\omega) \geq 0$ და $\xi = lim \xi_n\ ,\ n \to \infty$, სადაც $\{\xi_n\}\ ,\ n = 1,2, \dots$ არის მარტივი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა, მაშინ ξ-ს მათემატიკური ლოდინი $E\xi$ ანუ ლებეგის ინტეგრალი განისაზღვრება ტოლობით

$$E\xi = \lim_{n \to \infty} E\xi_n = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) \ \ \left(\int_{\Omega} \xi dP\right) \tag{2.17}$$

ანუ ყოველი ξ_n იღებს სასურველი რაოდენობის შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობებს. ნებისმიერი $\xi = \xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდისთვის, თუ $min(E\xi^{+}, E\xi^{-}) < \infty$, მაშინ

$$E\xi = E\xi^{+} - E\xi^{-} \tag{2.18}$$

სადაც ξ^{+} და ξ^{-} აღნიშნავს ξ-ს დადებით და უარყოფით ნაწილებს.

თვისებები:

(1) $E(c\xi) = cE\xi\ ,\ c = const$,

---

[1] იხილეთ ნაშრომები: [1], თავი II, §6; 7; [4], ლექცია 2;

(2) თუ $E|\xi| < \infty, E|\eta| < \infty$, მაშინ $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
(3) თუ $\xi = 0$, მაშინ $E = 0$;
(4) თუ $\xi \geq 0$ და $E\xi = 0$, მაშინ $\xi = 0$
(5) ვთქვათ, $\xi = \eta$, $E|\xi| < \infty$, მაშინ $E|\eta| < \infty$ და $E\xi = E\eta$.
(6) ვთქვათ, $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty, E(\xi I_A) \leq E(\eta I_A)$, $A \in \mathcal{F}$. მაშინ $\xi = \eta$.
(7) თუ $\xi_n \geq \eta$, $n \geq 1$, $E\eta > -\infty$, $\xi_n \uparrow \xi$, მაშინ $E\xi_n \uparrow E\xi$.
(8) თუ $\xi_n \leq \eta$, $n \geq 1$, $E\eta < \infty$, $\xi_n \downarrow \xi$, მაშინ $E\xi_n \downarrow E\xi$.

2. პირობითი მათემატიკური ლოდინი

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ალბათური სივრცეა და $\mathcal{G}$ არის $\mathcal{F}$ -ის რაიმე σ-ქვეალგებრა ($Y \subseteq \mathcal{F}$), არაუარყოფითი ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\mathcal{G}$ -ს მიმართ $E\big((\xi|\mathcal{G})\big)(\omega)$ არის ისეთი გაფართოებული შემთხვევითი სიდიდე, რომლისთვისაც შესრულებულია შედეგი პირობები:

ა) $E(\xi|\mathcal{G})$ არის $\mathcal{G}$ -ზომადი,

ბ) ნებისმიერი $A \in \mathcal{G}$ ხდომილებისთვის

$$\int_A \xi \mathrm{dP} = \int_A \mathrm{E}(\xi|\mathcal{G})\mathrm{dP} \qquad (2.19)$$

თუ ξ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა და $min\big(E(\xi^+|\mathcal{G}), E(\xi^-|\mathcal{G})\big) < \infty$, მაშინ

$$E(\xi|\mathcal{G}) = E(\xi^+|\mathcal{G}) - E(\xi^-|\mathcal{G})\,. \qquad (2.20)$$

თვისებები:

(1) თუ $\xi \leq \eta$, მაშინ $E(\xi|\mathcal{G}) \leq E(\eta|\mathcal{G})$,
(2) $|E(\xi|\mathcal{G})| \leq E(|\xi||\mathcal{G})$,
(3) $E(\xi|\mathcal{F}) = \xi$,
(4) თუ $\mathcal{F}_* = \{\phi, \Omega\}$, მაშინ $E\big(\xi|\mathcal{F}_*\big) = E\xi$,
(5) $EE(\xi|\mathcal{G}) = E\xi$,
(6) თუ ξ დამოუკიდებელია $\mathcal{G}$ -სგან, მაშინ $E(\xi|\mathcal{G}) = E\xi$,
(7) თუ $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, მაშინ $E[E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = E(\xi|\mathcal{G}_1)$.

2.4. მარტინგალები σ-ალგებრის მიმართ. იტოს ფორმულა. ოპტიმალური გაჩერება.[2]

1. მარტინგალები

განვიხილოთ ფილტრირებული ალბათური სივრცე ანუ სტოქისტური ბაზისი (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_n$, P), $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$.

[2] იხილეთ ნაშრომები: [1], თავი VII; §1; 2; 9; 13; [4], ლექცია 2;

(1) სტოქასტურ მიმდევრობას, ანუ $\mathcal{F}_n$-ზომადი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობას $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ ეწოდება მარტინგალი, თუ ყველა $n \geq 0$-სთვის $E|X_n| < \infty$ და

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \qquad (2.21)$$

(2) $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ სტოქასტურ მიმდევრობას ეწოდება: ა) განზოგადებული მარტინგალი, თუ $E|X_0| < \infty$, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$, განსაზღვრულია და სრულდება (5,1) ტოლობა, ბ) ლოკალური მარტინგალი, თუ მოიძებნება გაჩერების მომენტია მიმდევრობა $(\tau_k)_{\kappa\geq 1}$, $\tau_\kappa \uparrow \infty$, როცა $\kappa \to \infty$, ისეთი, რომ „გაჩერებული" მიმდევრობა $X^{\tau_\kappa} = \left(X_{\tau_\kappa \wedge n} I_{\{\tau_\kappa > 0\}}, \mathcal{F}_n\right)$ არის მარტინგალი ($\tau_\kappa \wedge n$ არის $min(\tau_\kappa, n)$). $(\tau_\kappa)_{k\geq 1}$, $\tau_\kappa \uparrow \infty$, მიმდევრობას მატოკალიზებელი მიმდევრობა ეწოდება.

ვთქვათ, $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ რაიმე მარტინგალია, ხოლო $V = (V_n, \mathcal{F}_{n-1})$ არის ჭვრეტადი მიმდევრობა (V_n არის $\mathcal{F}_{n-1}$-ზომადი). $V \cdot Y = ((V \cdot Y)_n, \mathcal{F}_n)$ სტიქასტურ მიმდევრობას, სადაც

$$(V \cdot Y)_n = V_0 Y_0 + \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Y_i \qquad (2.22)$$

და $\Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}$, ეწოდება მარტინგალური გარდაქმნა.

თეორემა 5.1. ვთქვათ, $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ არის რაიმე სტოქასტური იმდევრობა, $X_0 = 0$. შემდეგი პირობები ეკვივალენტურია:

ა) X - ლოკალური მარტინგალია,

ბ) X - განზოგადებული მარტინგალია,

გ) X - მარტინგალური გარდაქმნაა

მიმდევრობა $V = (V_n, \mathcal{F}_{n-1})$, $V_0 = 0$ და მარტინგალი $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$, $Y_0 = 0$, ისეთი, რომ $X = V \cdot Y$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ რაიმე სტოქასტური მიმდევრობაა, მაშინ $V \cdot Y$ სიდიდეს ეწოდება Y-ის გარდაქმნა V სიდიდით.

ვთქვათ, $\xi = (\xi_n, \mathcal{F}_n)$ არის სტოქასტური მიმდევრობა და $E|\mathcal{F}_n| < \infty$.

ა) ξ-ს ეწოდება მარტინგალ-სხვაობა, თუ

$$E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0 \qquad (2.23)$$

ბ) ξ-ს ეწოდება სუბმარტინგალი (სუპერმარტინგალი), თუ

$$E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq_{(\leq)} \xi_n \qquad (2.24)$$

შევნიშნოთ, რომ მარტინგალობის (2.21) პირობა შემდეგნაირად შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\int_A \xi_{n+1} dP = \int_A \xi_n dP \qquad A \in \mathcal{F}_n \qquad \text{თუ}$$

რომლის ანალოგიური ჩაწერები სამართლიანია აგრეთვე სუბმარტინგალისთვის და სუპერმარტინგალისთვის. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ $\xi = (\xi_n, \mathcal{F}_n)$ არის მარტინგალი, მაშინ სამართლიანია ტოლობა $E\xi_n = E_0$.

სუბმარტინგალების (სუპერმარტინგალების) სტრუქტურის დახასიათება მოიცემა შემდეგი სახით, რომელსაც დუბის დაშლა ეწოდება:

თეორემა 5.2. ვთქვათ, $\xi = (\xi_n, \mathcal{F}_n)$ არის სუბმარტინგალი. მაშინ მოიძებნება $m = (m_n, \mathcal{F}_n)$ მარტინგალი და $\mathcal{F}_{n-1}$-ზომადი (ჭვრეტადი) ზრდადი მიმდევრობა $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})$ ისეთი, რომ

$$\xi_n = m_n + A_n\,. \qquad (2.25)$$

საინტერესოა აგრეთვე შემდეგი ტოლობები , რომლებსაც ვალდის იგივეობები ეწოდება.

ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, $E|\xi_i| < \infty$ და τ არის გაჩერების მომენტი $\mathcal{F}_n^{\xi} = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ σ-ალგებრის მიმართ, $E_\tau < \infty$. მაშინ

$$E(\xi_1, \ldots, \xi_\tau) = E\xi_1 \cdot E_\tau \qquad (2.26)$$

თუ ამასთან $E\xi_i^2 < \infty$, მაშინ

$$E\{(\xi_1, \ldots, \xi_\tau) - \tau E\xi_1\}^2 = D\xi_1 \cdot E_\tau \qquad (2.27)$$

2.სამართლიანი თამაში

მარტინგალი შეიძლება გამოვიყენოთ ე.წ სამართლიანი თამაშის დახასიათებაში. განვიხილოთ ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა $(\xi_n)_{n\geq 1}$, P $(\xi_n = 1) = p$, P $(\xi_n = -1) = q, p + q = 1.$ ვიგულისხმოთ, რომ $\{\xi_n = 1\}$ არის მოთამაშის წარმატება

(მოგება), ხოლო { $\xi_n = -1$} არის მარცხი (წაგება) n-ურ პარტიაში.მაშინ მოთამაშის ჯამური მოგება n პარტიაში ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \xi_i = X_{n-1} + V_n \xi_n, \quad X_0 = 0 \qquad (2.28)$$

სადაც V_n არის მოთამაშის ფსონი n-ურ პარტიაში და V=($V_n, \mathcal{F}_{n-1}$) განსაზღვრავს მოთამაშის სტრატეგიას. აღვნიშნოთ $Y_{n=}\xi_1 + \cdots \xi_n$. მაშინ

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \Delta Y_i$$

და ამრიგად, X=($X_n, \mathcal{F}_n$), $X_0 = 0$, არის Y-ის გარდაქმნა V-თი. მოთამაშის თვალსაზრისით თამაში სამართლიანია, თუ ყოველ ნაბიჯზე მოსალოდნელი მოგება E($X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n$) $= 0$.ეს ტოლობა (მარტინგალობა) სრულდება, როცა p=q=$\frac{1}{2}$ რადგანაც ამ შემთხვევაში X=($X_n, \mathcal{F}_n$) არის მარტინგალი.

3. იტოს ფორმულა

იტოს ფორმულის დისკრეტული ვერსიის მაგალითი. ვთქვათ, ფუნქცია $F = F(x)$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(y)dy$$

და $X = (X_n)_{0 \le n \le N}$ არის შემთვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

განვიხილოთ X და $f(X) = f(X_n)_{0 \le n \le N}$ მიმდევრობების კვადრატული კოვარიაცია

$$[X, f(X)]_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \cdot \Delta f(X_k)$$

და „დისკრეტული ინტერვალი“ განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$I_n\big(X, f(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} f(X_{k-1}) \Delta X_k \;, \;\; I_0 = 0 \,.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x) = a + bx$, სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა - იტოს ფორმლის დისკრეტული ვერსია:

$$F(X_n) = F(X_0) + I_n\big(X, f(X)\big) + \frac{1}{2}[X, f(X)] \,. \qquad (2.29)$$

რაც შეეხება იტოს ფორმულას, მისი შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს. თუ $\xi_t\,, t \geq 0$, პროცესს აქვს წარმოდგენა w_t ვინერის პროცესით

$$d\xi_t = a(t,\xi_t)dt + b(t,\xi_t)dw_t \tag{2.30}$$

და $f(t,x)$ უნქციას უწყვეტი კერძო წარმომადგენლები: $f_t^{\mathrm{I}}\,, f_x^{\mathrm{I}}\,, f_{x,x}^{\mathrm{II}}$, მაშინ სამართლიანია წარმოდგენა - იტოს ფორმულა:

$$df(t,\xi_t) = \left(f_t^{\mathrm{I}} + f_x^{\mathrm{I}} \cdot a + \frac{1}{2} f_{x,x}^{\mathrm{II}} \cdot b^2\right)dt + f_x^{\mathrm{I}} \cdot bdw_t\,.$$

4. ოპტიმალური გაჩერება

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდეთა ოჯახი $\{\xi_\alpha(\omega), \alpha \in \mathcal{U}\}$ მნიშვნელობებით $R = (-\infty, +\infty)$ სიმრავლეში. გაფართოებული შემთხევითი სიდიდე $\xi = \xi(\omega)$ მნიშვნელობებით $(-\infty, +\infty]$ სიმრავლეში არის $\{\xi_\alpha(\omega), \alpha \in \mathcal{U}\}$ ოჯახის არსებითი სუპრემუმი, რომელიც შემდეგნაირად აღინიშნება

$$\xi(\omega) = \mathrm{esssup}_{\alpha \in \mathcal{U}}\, \xi_\alpha(\omega)\,, \tag{2.31}$$

თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა: ა) $\xi(\omega) \geq \xi_\alpha(\omega)$, ბ) $\xi(\omega) \leq \eta(\omega) \Longrightarrow \eta(\omega) \geq \xi_\alpha(\omega)$.

განვიხილოთ $\mathcal{F}_n$-ზომადი არაუარყოფითი ფუნქციების მიმდევრობა $f = (f_0, f_1, \ldots, f_N)$ და გაჩერებბის მომენტთა კლასი $\mathfrak{M}_0^N = \{\tau\colon\ 0 \leq \tau \leq N\}$, სადაც $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. შემოვიტანოთ ფასი, რომელიც შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება

$$V_0^N = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} Ef_\tau \tag{2.32}$$

ობტიმალური გაჩერების ამოცანა მდგომარეობს (2.22) ფასის პოვნაში და ოპტიმალური გაჩერების τ^* მომენტის პოვნაში, რომლისთვისაც მიიღწევა (2.22) სუპრემუმი. აღვნიშნოთ აგრეთვე:

$$V_n^N = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} Ef_\tau\,, \qquad \mathfrak{M}_n^N = \{\tau\colon\ 0 \leq \tau \leq N\}\,, \tag{2.33}$$

$$\nu_n^N = max\left(f_n, E(\nu_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\right), \qquad \nu_N^N = f_N\,, \tag{2.34}$$

$$\tau_n^N = min\{n \leq k \leq N\colon\ f_k = \nu_k^N\}\,. \tag{2.35}$$

თეორემა 2.1. სამართლიანია შემდეგი ფაქტები:

(1) τ_n^N არის ოპტიმალური გაჩერების მომენტი

$Ef_{\tau_n^N} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} Ef_\tau\ (= V_n^N)$,

(2) $\nu_n^N = \mathrm{esssup}_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} E(f_\tau | \mathcal{F}_n)$,

(3) $V_0^N = \nu_0^N\,; \qquad V_N^N = Ef_N$.

თავი 3. ევროპული ტიპის ოფციონები ბინომურ (B, S)-ბაზარზე

იხილეთ ნაშრომები = [2], თავი VI, §4a-4e, [4], ლექცია 4, [3], ლექცია 10-14.

3.1. ფინანსური (B, S) - ბაზრის ბინომური მოდელი. ზოგადი დებულებები

განვიხილოთ ფინანსური (B,S) ბაზრის კოქსის, როსის და რუბინშტეინის (კრრ) ბინომური მოდელი:

B_n=(1+r) B_{n-1}, B_0>0 (3.1)

S_n=(1+ρ_n) S_{n-1}, S_0, (3.2)

სადაც B=(B_n) არის ობლიგაია (საბანკო ანგარიში), S=(S_n) არის აქცია, n=0,1,...,N, საპროცენტო განაკვეთი r>0 მუდმივია, ხოლო ρ_n არის დამოუკიდებელ და ერთიანად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ამასთან P(ρ_n=b)=p, P(ρ_n=a)=1-p=q,

-1<a< r<b.

შევნიშნოთ,რომ (3.1), (3.2) მოდელი ანუ (B,S)=(B_n, S_n), n=0,1,…,N, ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელი კიდევ შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$\Delta\, B_n = rB_{n-1}$, (3.3)

$\Delta\, S_n = \rho_n S_{n-1.}$ (3.4)

როგორც ვიცით, ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანა $f = f_N$ გადახდის ფუნქციით მდგომარეობს შემდეგში:

1. ოფციონის C_N სამართლიანი ფასის დადგენა,
2. მინიმალური $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ ჰეჯის აგება,
3. მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი $X_n^{\pi^*}$ კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა.

ცხადია, მინიმალური ჰეჯისთვის უნდა სრულდებოდეს ტოლობა

$X_N^{\pi *} = \beta_N^* B_N + \gamma_N^* S_N = f(S_N)$

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულებები.

თეორემა 3.1. ვთქვათ, ვიხილავთ (3.1),(3.2) მოდელს და ევროპული ტიპის ოფციონის გადახდის ფუნქცია $f = f_N = f_N(S_0, S_1, \dots, S_N)$. მაშინ

1) ოფციონის სამართლიანი ფასი

$C_N = E^*(1+r)^{-N} \cdot f_N$,

სადაც E^* არის შემდეგი ზომით გასაშუალება

$p^* = P^*(\rho_n = b) = \frac{r-a}{b-a}$ (3.5)

2) არსებობს თვითდაფინანსებადი მინიმალური ჰეჯი $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ რომლის კომპონენტებია:

$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi *} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}}$

$\gamma_n^* = \frac{\propto_n^* B_n}{S_{n-1}}$

სადაც $\propto_k^*$ არის $\mathcal{I}_{k-1}$ - ზომადი ფუნქციები

3) მინიმალური $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალია

$$X_n^{\pi *} = E^*((1+r)^{-(N-n)} \cdot f_N | J_n$$

თეორემა 3.2. ვთქვათ, ბინომურ ფინანსურ (B,S,) - ბაზარზე განიხილება ევროპული ტიპის ოფციონი $f_N = f(S_N)$ გადახდის ფუნქციით. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1) ოფციონის სამართლიანი ფასი მოიცემა ფორმულით:

$C_N = C(f_N) = (1+r)^{-N} \cdot F_N(S_{0;}\, p^*)$,

სადაც p^* განისაზღვრება (3.5) ტოლობით, ხოლო

$$F_n = (x; p) = \sum_k^n f(x(1+b)^k\,(1+a)^{n-k})C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (3.6)$$

2) მინიმალური $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის ევოლუცია მოიცემა ფორმულით:

$$X_n^{\pi*} = (1+r)^{-(N-n)} \cdot F_{N-n}\big(S_{0;}\, p^*\big),$$

3) არსებობს მინიმალური ჰეჯი $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, რომლის კომპონენტები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi*} - \tilde{\gamma}_n S_{n-1}}{B_{n-1}}$$

$$\gamma_n^* = (1+r)^{-(N-1)}x$$

$$x\,\frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a); p^*)}{S_{n-1}(b-a)}$$

3.2. კოქსის, როსის და რუბინშტეინის ფორმულა

განვიხილოთ (კრრ) მოდელი (3.1), (1.2) და ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_N) = (S_N - K)^+, \qquad (3.7)$$

სადაც $(x)^+ = \max(x; 0)$, ხოლო k>0 არის შეთანხმების (საკონტრაქტო) ფასი, ანუ ემიტენტი ვალდებულია ოფციონის მფლობელს მიყიდოს აქცია k ფასად დროის N მომენტში.

(კრრ) მოდელში კოქსის, როსის და რუბინშტეინის მიერ მიღებულია (3.7) გადახდის ფუნქციის შემთხვევაში ევროპული ტიპის ოფციონის სამართლიანი ფასის ფორმულა. ეს ფორმულა შედგება მხოლოდ მოდელის საწყისი პარამეტრებისგან: B_0, S_0, r, a, b, p^* და k.

თეორემა 3.3 (კრრ) მოდელში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასი (3.7) გადახდის ფუნქციით მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$C_N = (1+r)^{-N} F_N(S_0; p^*)$$
$$= S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} (\frac{1+a}{1+r})^N (\frac{1+b}{1+a})^k - K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k$$

$(1-p^*)^{N-k}$ (3.8)

სადაც k_0=$k_0(a,b,S_0,k)$ არის უმცირესი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა:

$S_0 = (1+a)^N (\frac{1+b}{1+a})^{k_0}$>k.

დამტკიცება: (3.7), გადახდის ფუნქციის შემთეხვევაში გვექნება

$$F_N(S_{0;}\, p^*) = \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \max(0, S_0((1+a)^N (\frac{1+b}{1+a})^k - K) \quad (3.9)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $k_0 > N$, მაშინ $F_N(S_{0;}\, p)$ =0 და ამ შემთხვევაში სამართლიანი ფასი C_N=0. თუ $k_0 \leq N$, მაშინ (3.9) - დან ადვილად მივიღებთ დასამტკიცებელ (3.8) ფორმულას.

3.3 ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულა

განვიხილოთ ახლა ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით:

$$f_N = f(S_N) = (K - S_N)^+, \quad (3.10)$$

ამ შემთვევაში ოფციონის სამართლიანი ფასი P_N შეიძლება ვიპოვოთ (3.8) ფორმულის გამოყენებით. P_N-ის ფორმულას ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულა ეწოდება. სამართლიანია თეორემა 3.3-ის შედეგი 3.1. ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასი P_N (3.10) გადახდის ფუნქციით გამოითვლება ფორმულით:

$$P_N = C_N - S_0 + K(1+r)^{-N} \tag{3.11}$$

დამტკიცება. გვაქვს $\max(0, K - S_N) = \max(S_N - K, 0) - S_N + K$. ამიტომ

$$P_N = E^*(1+r)^{-N}\max(0, K - S_N) = C_N - E^*(1+r)^{-N}S_N + K(1+r)^{-N}$$

ახლა თუ შევნიშნავთ, რომ $E^*S_N = (1+r)^{-N}S_0$, მაშინ მივიღებთ დასამტკიცებელ (3.11) ფორმულას.

3.4 მოპასუხე პორტფელის პრინციპი, მინიმალური ჰეჯი

მინიმალური ჰეჯის ასაგებად გამოიყენება ე.წ. მოპასუხე პორტფელის პრინციპი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, დროის n მომენტში ინვესტორის პორტფელი (სტრატეგია) $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, რომლის შესაბამისი კაპიტალია

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$$

საჭიროა ავაგოთ ისეთი პორტფელი $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$, რომ დროის n მომენტში მისი შესაბამისი კაპიტალია

$$X_n^\pi = \beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n \tag{3.12}$$

ამასთან დროის $(n+1)$ მომენტში π_{n+1} პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ტოლი უნდა იყოს შემდეგი სიდიდის

$$X_{n+1}^\pi = \beta_{n+1}B_{n+1} + \gamma_{n+1}S_{n+1} = f(S_{n+1}) \tag{3.13}$$

სადაც $f = f(S_n)$ რაიმე გადახდის ფუნქციაა, n=0,1,...,N. (12.1), (12.2) მოდელის შემთხვევაში უცნობი β_{n+1} და γ_{n+1} პარამეტრებისთვის (3.13) ტოლობიდან მივიღებთ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\beta_{n+1}(1+r)B_n + \gamma_{n+1}(1+b)S_n = f((1+b)S_n)$$

$$\beta_{n+1}(1+r)B_n + \gamma_{n+1}(1+a)S_n = f((1+a)S_n)$$

რომლის ამონახსნი β_{n+1}^* და γ_{n+1}^* მოიცემა ფორმულებით:

$$\beta_{n+1}^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_n\big)-(1-a)f\big((1+b)S_n\big)}{(1+r)(b-a)B_n} \tag{3.14}$$

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{f\big((1+b)S_n\big)-f\big((1+a)S_n\big)}{(b-a)S_n} \tag{3.15}$$

დროის ბოლო N მომენტში გვექნება $\pi_N^* = (\beta_N^*, \gamma_N^*)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი

$X_N^{\pi^*}=\beta_N^* B_N + \gamma_N^* S_N = f(S_N)$.

ამრიგად, მოპასუხე პორტფელის პრინციპით აგებული $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ პორტფელი არის მინიმალური ჰეჯი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ იგი არის თვითდაფინანსებადი სტრატეგია.

თუ (3.14) და (3.15) სიდიდეებს შევიტანთ (3.12) ტოლობაში β_{n+1} და γ_{n+1} სიდიდეების მაგივრად, მაშინ ადვილად მივიღებთ $X_n^{\pi^*}$ კაპიტალის შემდეგ წარმოდგენას

$$X_n^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\big[p^* f\big((1+b)S_n\big) + (1-p^*)f\big((1+a)S_n\big)\big],$$

სადაც მარტინგალური ალბათური ზომა p^* განისაზღვრება (3.5) ტოლობით.

3.5 რეკურენტული ფორმულები

აქციის ფასების, გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებისა და ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლისთვის გამოიყენება შემდეგი რეკურენტული ტოლობები:

1. ბოლო ფინალურ n=N მომენტში გვაქვს N+1 მნიშვნელობა:

$f_{N,j} = f(S_N,j)$ j=0,1,...,N.

2. ბოლოს წინა n=N-1 მომენტში

$$C_{N-1,j} = (1+r)^{-1}\big[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*) f_{N,j}\big], \quad j = 0,1,\dots,N-1;$$

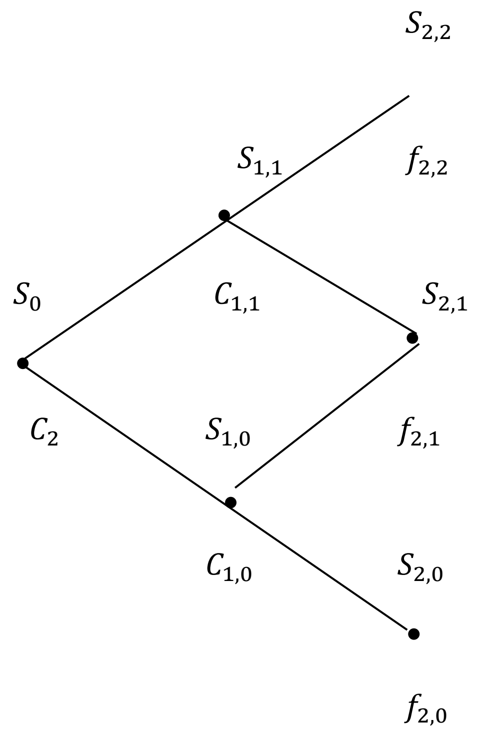
და ა.შ. n=N-k მომენტში

$C_{N-k,j} = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{N-k+1,j+1} + (1-p^*) C_{N-k+1,j}\right], \quad j = 0,1,\dots,N-k;$ და ა.შ. N=0 მომენტში გამოითვლება ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_N = C_{0,0} = C(f_N) = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{10}\right]. \qquad (3.16)$$

3.6. ბინომური ხეები

(3.16) ტოლობების გამოყენებით ხშირად თვალსაჩინოების მიზნით აგებენ ე.წ. ბინომურ ხეებს. ე.წ. ბინომურ ხეებს. მაგალითად ოფციონის ფასდადების ორნაბიჯიან ამოცანაში (N=2, n=0,1,2) ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახაზი 3.1 ორნაბიჯიანი ბინომური ხე

ამ ნახაზზე მოტანილია შემდეგი სიდიდეები:

$S_{2,0} = S_0(1+a)^2, \qquad f_{2,0} = f(S_{2,0}),$

$S_{2,1} = S_0(1+b)(1+a), \quad f_{2,1} = f(S_{2,1}),$

$S_{2,2} = S_0(1+b)^2, \qquad f_{2,2} = f(S_{2,2}),$

$S_{1,0} = S_0(1+a),$

$S_{1,1} = S_0(1+b),$

$$C_{1,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right], \tag{3.17}$$

$$C_{1,1} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right], \tag{3.18}$$

ხოლო ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_2 = C(f_2) = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}\right], \tag{3.19}$$

თავი 4. ამერიკული ტიპის ოფციონები ბინომურ (B,S) - ბაზარზე

იხილეთ ნაშრომები:[2], თავი VI. §a-§5d; [4], ლექცია 5; [3], ლექცია 15.

4.1. ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანა და ოპტიმალური გაჩერება

განვიხილოთ (კრრ) მოდელი (ბინომური მოდელი):

$$\Delta B_n = rB_{n-1} \tag{4.1}$$

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1} \tag{4.2}$$

და ვიგულისმოთ, რომ გარკვეული λ>1 რიცხვისთვის

$$b = \lambda - 1; \;\; a = \lambda^{-1} - 1 \tag{4.3}$$

ასეთ შემთხვევაში აქციის ფასის ევოლუცია შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n} \tag{4.4}$$

სადაც

$P\ (\varepsilon_\iota = 1 = P(\rho_\iota = b) = p,$

$P\ (\varepsilon_\iota = -1 = P(\rho_\iota = a) = 1 - p = q, \quad \iota = 1, \dots, n;$

ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ S_0-ის მნიშვნელობები ეკუთვნის $E = \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \dots\}$ სიმრავლეს. მაშინ S_n-ის მნიშვნელობებიც ეკუთვნის E სიმრავლეს. (4.4) ფორმულით მოცემულ $S = (S_n)_{n\geq 0}$ მიმდევრობას ეწოდება გეომეტრიული შემთხვევითი ხეტიალი.

ვთქვათ, $x\epsilon E$ და p_x არის $(S_n)_{n\geq 0}$ მიმდევრობის განაწილება P ზომის მიმართ იმ პირობით, რომ $S_0 = x$;

$P_x = Law\ ((S_n))_{n\geq 0} | P, S_0 = x$

შევნიშნოთ, რომ $S = (S_0)_{n\geq 0}$ მიმდევრობა წარმოადგენს მარკოვის ერთგვაროვან შემთხვევით ხეტიალს ანუ ერთგვაროვან მარკოვის ჯაჭვს.

ვთქვათ, T არის ერთ ნაბიჯზე გადასვლის ოპერატორი:

$$Tg(x) = Exg(S_1), \qquad x \in E,$$

სადაც $g(x)$ განსაზღვრულია E სიმრავლეზე, ხოლო Ex არის P_x ზომით გასაშუალება. (13.3) წარმოდგენის თანახმად გვექნება

$$Tg(x) = pg(\lambda x) + (1-p)g(\frac{x}{\lambda}) \qquad (4.5)$$

(13.5)

ბინომური მოდელით აღწერილი (B,S) - ბაზარი არის უარბიტრაჟო და სრული ერთადერთი მარტინგალური ზომით

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \text{1-}p^* = q^* = \frac{b-r}{b-a}, \qquad (4.6)$$

რომელიც (4.3) ტოლობების თანახმად ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$p^* = \frac{\propto^{-1}-\lambda^{-1}}{\lambda-\lambda^{-1}}, 1-p^* = \frac{\lambda-\propto^{-1}}{\lambda-\lambda^{-1}} \qquad (4.7)$$

სადაც $\propto = (1+\ r)^{-1}$

განვიხილოთ ახლა გადახდის ფუნქციების სისტემა $f = (f_0, f_{1,} \dots)$ რომელიც განსაზღვრულია ფილტრირებულ ალბათურ სივრცეზე $(\Omega, \mathcal{I}, (\mathcal{I}_n)_{n\geq 0}, P)$ $\mathcal{I}_0\{\emptyset, \Omega\}$. ამერიკული ტიპის ოფციონის მფლობელს უფლება აქვს გაანაღდოს კონტრაქტი დროის ნებისმიერ n=0,1,...,N მომენტში, რის გამოც ოფციონის სამართლიანი ფასისა და განაღდების რაციონალურ მომენტში პოვნა რთულ მათემატიკურ ამოცანას წარმოდგენს.

ამერიკული ოფციონის ჰეჯირების ზედა ფასია

$$\tilde{C}_N(f) = \inf\{y \geq 0 : X_0^\pi = y,\ X_\tau^\pi \geq f\},$$

სადაც r არის გაჩერების მომენტში m_o^N კლასიდან. ეს ტოლობა წარმოადგენს ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოსახულებას, რომელიც ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\tilde{C}_N(f) = \frac{sup}{\tau e m_0^N} B_0 E \frac{f\tau}{B\tau} \qquad (4.8)$$

ამრიგად, ამერიკული ტიპის ოფციონის $\tilde{C}_N(f)$ ფასის პოვნა დაიყვანება $f_0, f_{1,} \dots, f_N$ სტოქასტური მიმდევრობის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანაზე.

შეიძლება, ცხადია განვიხილოთ გადახდის ფუნქციების სხვადასხვა სახეები, მაგალითად ყიდვის და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონები შესაბამისი გადახდის ფუნქციებით

$f_n = (S_n - K)^+$ და $f_n = (K - S_n)^+$, ანუ უფრო ზოგადი გადახდის ფუნქციები:

$$f_n = f_n(x) = \beta^n (x-k)^+,$$

სადაც 0< $\beta \leq 1$, $E = \{x = \lambda^k, k = 0, \pm 1, \ldots\}, \lambda > 1$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$V_n^N(x) = \genfrac{}{}{0pt}{}{sup}{\tau_{6m_o^N}} E_x(\propto, \beta)^\tau (Sr - K)^+$$

სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენები:

$V_n^N(x) = (\propto, \beta)^n V_0^{N-n}(x)$,

$\tilde{C}_N(f) = V_0^N(x)$,

$V_0^N(x) = Q^N g(x)$,

სადაც $g(x) = (x - k)^+$, ხოლო

$Qg(x) = \max(g(x), \propto, \beta T g(x))$

ამასთან m_o^N კლასში არსებობს ოპტიმალური გაჩერების მომენტი, რომელიც განიზაღვრება ფორმულით

$$\tau_o^N = \min\{0 \leq n \leq N: V_0^{N-n}(S_n) = g(S_n)\}$$

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ თუ $\beta = 1$, მაშინ ყიდვის სტანდარტული ოფციონის შემთხვევაში ევროპული და ამერიკული ოფციონების სამართლიანი (რაციონალური) ფასები ერთმანეთს ემთხვევა.

ვთქვათ, ახლა 0< $\beta < 1$. სამართლიანი შედეგი

თეორემა 4.1 არსებობს მიმდევრობა $x_o^N \epsilon E U\{0\}, 0 \leq n \leq N$, ისეთი, რომ

0=$x_N^N \leq x_{N-1}^N \leq \cdots \leq x_0^N$ და

1) $V_0^N(x) = \begin{cases} g(x), & x\epsilon[x_0^N, \infty), \\ Q^N g(x), & x\epsilon(0, x_0^N), \end{cases}$

2) რაციონალური (სამართლიანი) ფასი

$\tilde{C}_N(f) = V_0^N(S_0)$

3) ოპტიმალური გაჩერების მომენტი

τ_0^N=min$\{0 \leq n \leq N: S_n \epsilon [x_n^N, \infty)\}$

4.2 თეორემა სამართლიანი ფასისა და რაციონალური მომენტი

ამ პუნქტში მოვიტანთ ამერიკული ტიპის ოფციონის ფასდადების თეორიაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი შედეგის დამტკიცებას სამართლიანი ფასისა და რაციონალური მომენტის შესახებ.

თეორემა 4.2 ვთქვათ, ვიხილავთ ფინანსური (B,S) - ბაზრის (4.1), (4.2) ბინომურ მოდელს და გვაქვს არაუარყოფითი გადახდის ფუნქციების მიმდევრობა $f = (f_n)0 \leq n \leq N$ მაშინ

1) ამერიკული ტიპის ოფციონის სამართლიანი ფასი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$C_N^A = \sup_{\tau} E^*(1+r)^{-1} \cdot f\tau, \tag{4.9}$$

სადაც sup აიღება τ გაჩერების მომენტებით, $0 \leq \tau \leq N$, და მიიღწევა რომელიმე τ^* მომენტზე, ხოლო E^* არის გასაშუალება რისკ-ნეიტრალური $p^*=\frac{r-a}{b-a}$ ზომით.

2) τ^* გაჩერების მომენტი არის რაციოანლური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$E^*(1+r)^{-1} \cdot f\tau^* = \sup_{\tau} E^*(1+r)^{-1} \cdot f\tau, \tag{4.10}$$

დამტკიცება: ვიგულისმოთ, რომ გვაქვს სტოქასტური ბაზისი $(\Omega, \mathcal{J}, (\mathcal{J}_n), P)$; ვთქვათ, $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ პორტფელის კომპონენტები $\mathcal{J}_{n-1}$-ზომადებია. გვაქვს გარდა ამისა თვითდაფინანსების პირობა

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0 \tag{4.11}$$

და ტოლობა

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{1\leq k\leq n}(\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k) \tag{4.12}$$

ვიცით, რომ $p^*=\frac{r-a}{b-a}$ ზომით მიმდევრობა $(M_n^\pi, \mathcal{J}_n, p^*)$ არის მარტინგალი, $M_n^\pi = X_n^\pi / B_n$ და ნებისმიერი $\tau \leq N$ გაჩერების მომენტისათვის

$$E^* M_q^\pi = M_0^\pi,$$

$$X_0^\pi = E^* \propto^\tau X_\tau^\pi, \tag{4.13}$$

სადაც $\propto = (1+r)^{-1}$,

თუ π სტრატეგია არის ჰეჯი, მაშინ ცხადია

$$x \geq \sup_{\tau} E^* \propto^{\tau} f_{\tau} \tag{4.14}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\pi = \pi^*$ არის მინიმალური ჰეჯი, მაშინ

$$x = \sup_{\tau} E^* \propto^{\tau} f_{\tau} \tag{4.15}$$

შევნიშნოთ, რომ (4.15) არის მინიმალური π^* ჰეჯის არსებობის აუცილებელ პირობასთან ერთად აგრეთვე საკმარისი პირობა:

ლემა 4.1. (საკმარისობა). ვთქვათ (4.15) შესრულებულია, მაშინ არსებობს მინიმალური ჰეჯი π_n^*

ა) მტკიცებულება და ის ფაქტი, რომ ზედა საზღვარი (4.9)-ში მიიღწევა რომელიღაც τ^* მომენტისთვის, გამომდინრეობს ლემა 4.1-დან და (4.14) უტოლობიდან.

ბ) ვთქვათ, π^* სტრატეგია არის ჰეჯი, რომლის არსებობას იძლევა ლემა (4.1) თუ ამასთან τ^* არის რაციონალური მომენტი, მაშინ

$$X_{\tau}^{\pi^*} = f\tau^*$$

$$C_N^A = X_0^{\pi^*} = E^* \propto^{\tau^*} f\tau^*$$

პირიქითაც, ვთქვათ, ნ არის რაიმე გაჩერების მომენტი. ისეთი, რომ

$$E^* \propto^{ნ} f_{ნ} = \sup_{\tau} E^* \propto^{\tau} f_{\tau} \tag{4.16}$$

ვთქვათ, π არის რომელიმე თვითდაფინანსებადი სტრატეგია ისეთი, რომ

$X_0^{\pi} = C_N^A$ და $X_{ნ}^{\pi} \geq f_{ნ}$. მაშინ (4.14)-ის თანახმად

$$X_0^{\pi} = E^* \propto^{ნ} X_{ნ}^{\pi} \geq E^* \propto^{ნ} f_{ნ} = \sup_{\tau} E^* \propto^{\tau} f_{\tau} = C_N^A$$

მაგრამ $X_0^{\pi} = C_N^A$ და მაშასადამე $p^*(X_{ნ}^{\pi} > f_{ნ}) = 0$. ამრიგად, თუ ნ მომენტი აკმაყოფილებს (4.16) ტოლობას, მაშინ ის არის რაციონალური ანუ $X_{ნ}^{\pi} = f_{ნ}$.

4.3 რეკურენტული ფორმულები

ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს (ისევე როგორც ევროპული ოფციონის გათვლის დროს) ჩვენ შეიძლება გამოვიყენოთ ბინომური ხეები და მოპასუხე პორტფელის პრინციპი. N-ნაბიჯიანი ბინომური ხის კვანძებში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობებით

$$S_N = S_N, j = S_0(1+b)^j(1+a)^{N-j}, \quad j = 0,1,\dots,N, \tag{4.17}$$

ხოლო ბოლო n=N მომენტში N+1 ფინალურ კვანძში ოფციონის ფასები (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებით) დაითვლება შემდეგი ტოლობებით:

$$f = f_{N,j} = f\big(S_{N,j}\big), \ \ j = 0,1,\dots,N, \tag{4.18}$$

სადაც f არის რაიმე გადახდის ფუნქცია.

ოფციონის მიმდინარე (შიგა) ფასები და სამართლიანი ფასი დაითვლება რეკურენტული ფორმულებით შემდეგი სქემის მიხედვით.

დროის n=N-1 მომენტში (ფინალური წინა N კვანძებში) გვექნება

$$C_{N-1\ j}^A = max\{f_{N-1,j;}\big(1+r\big)^{-1}\big[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*)f_{N,j}\big]\}, \ \ j = 0,1,\dots,N-1.$$

დროის n=N-2 მომენტში გვექნება

$$C_{N-2\ j}^A = max\{f_{N-2,j;}\big(1+r\big)^{-1}\big[p^* C_{N-1\ j+1}^A + (1-p^*)C_{N-1\ j}^A\big]\}, \ \ j = 0,1,\dots,N-2.$$

და ა.შ. დროის n=N-k მომენტში გვექნება

$$C_{N-k\ j}^A = max\{f_{N-k,j;}\big(1+r\big)^{-1}\big[p^* C_{N-k+1\ j+1}^A + (1-p^*)C_{N-k+1\ j}^A\big]\}, \ \ j = 0,1,\dots,N-k.$$

და ა.შ. დროინ n=N-N=0 მომენტში გვექნება

$$C_N^A = C_{0,0}^A = \ max\{f(S_0);\big(1+r\big)^{-1}\big[p^* C_{1,1}^A + (1-p^*)C_{1,0}^A\big]\},$$

სადაც $f(S_0) = f\big(S_{0,0}\big) = f_{0,0}, \quad p^* = \frac{r-a}{b-a}$ (4.19)

ამრიგად რეკურენტული ფორმულები და ბინომური ხეები გამოიყენება ევროპული და ამერიკული ოფციონების გათვლის (ფასდადების) ამოცანების გადაწყვეტაში. კერძოდ, შესაძლებელია აქციის და ოფციონის ფასების ევოლუციის

აღწერა და ბინომური ხის კვანძებში მათი ყველა შესაძლო მნიშვნელობის გამოთვლა ოფციონის სამართლიანი ფასის ჩათვლით.

რაც შეეხება ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის პოვნას, როგორც აღვნიშნეთ, იგი, საზოგადოდ, რთულ ამოცანას წარმოადგენს, ჩვენ მოვიტანთ ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის არჩევის ერთ მარტივ წესს ბინომური ხის გამოყენების შემთხვევაში. წესი შემდეგში მდგომარეობს: ამერიკული ოფციონის აღსრულების რაციონალური მომენტი არის დროის ის პირველი მომენტი, როდესაც ოფციონის ფასი (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობა) გაუტოლდება მის შინაგან ფასს. ამრიგად, რაციონალური მომენტისათვის გვაქვს

$$\tau^* = \min\{n: f(S_n) = C_{\mathrm{n}}^A\} \qquad (4.20)$$

თუ ამერიკული ოფციონის განაღდება მოხდა არარაციონალურ τ მომენტში $f(S_\tau) > (C_\tau^A)$, მაშინ ემიტენტი შეასრულებს ოფციონის შესაბამის ვალდებულებას და ამასთან, იგი მიიღებს ურისკო მოგებას.

4.4. ბინომური ხეები

ავაგოთ ახლა ამერიკული ოფციონისთვის ორნაბიჯიანი ბინომური ხე.

(4.19) ტოლობების მიხედვით N=2, j=0,1,2, შემთხვევაში

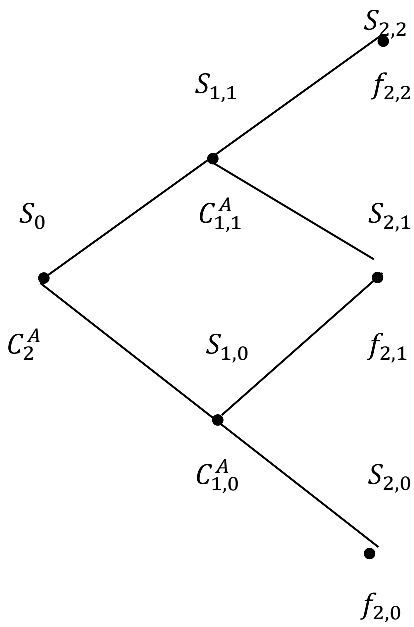
$$S_2 = S_2\mathrm{j} = S_0(1+b)^j \cdot (a+a)^{2-j}, \;\; j = 0,1,2,$$

$$f = f_2 = f_2 j = f(S_{2,j}), \qquad j = 0,1,2,$$

$$C_{1,j}^A = \max\{f_{1,j;}(1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,j+1} + (1-p^*) f_2, j\right]\}, \qquad j = 0,1,$$

$$C_{0,j}^A = C_2^A = \max\{f_{0,j;}(1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,j+1}^A + (1-p^*) C_{1,j}^A\right]\}, \quad j = 0,1,$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახაზი 4.1. ორნაბიჯიანი ბინომური ხე

თავი 5. ოფციონები ობლიგაციების მრავალაქტივიან ბინომურ ბაზარზე

იხილეთ ნაშრომები:[2], თავი V, §1a-1d, [3].ლექცია 10,[7].

5.1. დროზე დამოკიდებული საპროცენტო განაკვეთი

განვიხილოთ (k+1) - აქტივიანი ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელი, რომელიც შედგება k რაოდენობის ობლიგაციისგან (საბანკო ანგარიშისგან).

$(B^{(1)}, \dots , B^{(k)}, S) = (B_{n,}^{(1)}, \dots, B_{n,}^{(k)}, S_n),\ \ n = 0,1,\dots,N.$

ვიგულისმოთ, რომ ეს სიდიდეები მოიცემა შემდეგი რეკურენტული ტოლობებით:

$B_{n,}^{(1)} = \left(1 + r^{(1)}\right)B_{n-1,}^{(1)} \quad B_0^{(1)} > 0,$

------------------- --------

$B_n^{(k)} = \left(1 + r^{(k)}\right)B_{n-1,}^{(k)}\ \ B_0^{(k)} > 0,$ (5.1)

$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}, \qquad S_0 > 0,$

სადაც $r^{(i)} > 0,\ \ i = 1,\dots,k$ საპროცენტო განაკვეთებია, ხოლო ρ_n არის დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა მხოლოდ ორი შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობით a და b, რომლის შესაბამისი ალბათობებია

$P = (\rho_n = b) = p,\ P = (\rho_n = a) = 1 - p = q,\ n = 0,1,\dots,N.$ ამასთან იგულისხმება, რომ $-1 < a < r^i < b, i = 1,\dots,k, B_0^{(i)} \neq B_0^{(i)}, i \neq j, \quad i,j, = 1,\dots,k.$

დავუშვათ ახლა, რომ დროის ნებისმიერ n მომენტში, n=0,1,...,N (k+1) განზომილებიან პორტფელში $\pi_n = \left(\beta_1^{(1)},\dots,\beta_n^{(k)},\gamma_n\right)$ ობლიგაციების რაოდენობები ერთმანეთის ტოლია: $B_n^{(1)} = \dots = \beta_n^{(k)}$. მაშინ ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შედეგი სახით.

$X_n^{\pi} = \beta_n\left(B_n^{(1)} + \dots + B_n^{(k)}\right) + \gamma_n S_n$ (5.2)

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$B_n = B_n^{(1)}+\dots+B_n^{(k)} = (1 + r_n)B_{n-1},$

სადაც r_n უცნობი საპროცენტო განაკვეთია. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ტოლობა:

$$(1 + r_n)\sum_{i=1}^{k} B_{n-1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k}\left(1 + r^{(i)}\right)B_n^{(i)},$$

საიდანაც ადვილად ვპოულობთ უცნობი საპროცენტო განაკვეთის გამოსათვლელ ფორმულას დროის ნებისმიერ n მომენტში:

$$r_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} r^{(i)} B_{n-1}}{\sum_{i=1}^{k} B_{n-1}^{(i)}} \qquad (5.3)$$

ამრიგად, (k+1) აქტივიანი (5.1) მოდელის მაგივრად ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ორაქტივიანი ბინომური მოდელი:

$$B_n = (1 + r_n) B_{n-1}, \qquad (5.4)$$

$$S_n = (1 + \rho_n)\, S_{n-1},$$

სადაც საპროცენტო განაკვეთი $r_n > 0$ დამოკიდებულია დროზე და განისაზღვრება (5.3) ფორმულით, ხოლო $B_n = B_n^{(1)} + \cdots + B_n^{(k)}$.

5.2. რისკ-ნეიტრალური ზომა და მინიმალური ჰეჯი

იმისათვის, რომ გადავწყვიტოთ ოფციონის ფასდადების ამოცანა, საჭიროა ფინანსური ბაზრის (k+1) - აქტივიდან ბინომურ მოდელში ავაგოთ ბინომური ხეები და მინიმალური ჰეჯი. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში რისკ ნეიტრალური (მარტინგალური) ალბათობა განისაზღვრება (3.5)-ის ანალოგიურად შემდეგი ტოლობით

$$p_n^* = \frac{r_n - a}{b - a}, \qquad (5.5)$$

სადაც r_n განსაზღვრულია (5.3) ტოლობით.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ p_n^* ალბათური ზომის გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ (3.16) და (4.19) ფორმულების ანალოგიური ევროპული და ამერიკული ოფციონების სამართლიანი ფასის გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულები N-ნაბიჯიან ამოცანაში. ამ ფორმულების საშულებით კი შეიძლება ავაგოთ ბინომური ხეები. მაგალითისთვის ავაგოთ ევროპული ტიპის ოფციონისთვის ორნაბიჯიანი ბინომური ხე.

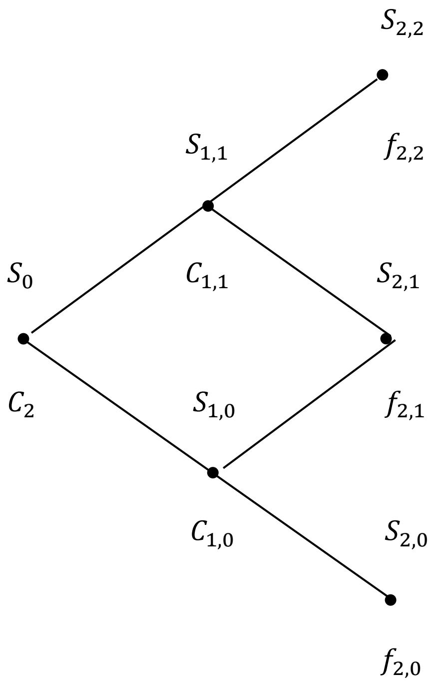
გვაქვს:

$$C_{1,0} = (1 + r_2)^{-1}\left[p_2^* f_{2,1} + (1 - p_2^*) f_{2,0}\right], \qquad (15.6)$$

$$C_{1,1} = (1 + r_2)^{-1}\left[p_2^* f_{2,2} + (1 + p_2^*) f_{2,1}\right], \qquad (15.7)$$

$$C_2 = (1 + r_1)^{-1}\left[p_1^* C_{1,1} + (1 - p_1^*) C_{1,0}\right], \qquad (15.8)$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე.



ნახაზი 5.1

რაც შეეხება მინიმალური ჰეჯის გამოსათვლელ ფორმულებს, იგი მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით მოიცემა შემეგი ტოლობებით:

$$\beta^*_{n+1} = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_n\big)-(1+a)f((1+b)S_n}{(1+r_{n+1})B_n(b-a)} \tag{5.9}$$

$$\gamma^*_{n+1} = \frac{f((1+b)S_n)-f((1+a)S_n)}{(b-a)S_n} \tag{5.10}$$

5.3. ფინანსური ბაზრის მოდელი და პარამეტრები

განვიხილოთ ფინანსური ბაზარი დისკრეტულ დროში, სარისკო S - აქციით და K - ცალი $B_n^{(1)}, B_n^{(2)}, \dots B_n^{(k)}$ ობლიგაციით. $B_{(i)}$ და S აქტივების ფასები მოცემულია შემდეგი რეკურენტული ტოლობით

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}, \qquad S_0 > 0 \tag{5.11}$$

$$B_n^{(1)} = \left(1+r^{(i)}\right)B_{n-1}^{(1)}, \dots, B_n^{(k)} = (1+r^{(k)})B_{n-1}^{(k)} \tag{5.12}$$

n=0, 1, 2, ... , N (2) საპროცენტო განაკვეთებში $r^{(i)},\ i = 1, \dots, k$ და $B_0^{(1)}$ და $B_0^{(k)}$ არის დადებითი კონსტანტები (1.1)-ში რომელიც წარმოადგენს საფონდო S აქტივის ფასს. ρ_n - არის დამოუკიდებელი კოეფიციენტი. იდენტურად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადები, რომლებიც იღებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას a და b-ს, -1< a < b, ალბათობით p>0 და 1-p შესაბამისად,. აქედან გამომდინარე $a < r^{(i)} < b,\ \ i = 1, \dots, k$.

ვარაუდობენ, რომ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ - არის სტოქასტური ბაზისი, სადაც $\mathcal{F}_n$=σ($S_0, \dots, S_n$} არის მინიმალური σ - ალგებრა $S_0, \dots, S_n$-ით წარმოშობილი.

რამდენიმე საბანკო ანგარიშის განხილვის საფუძველზე დადგინდა, რომ ბანკებს აქვს განსხვავებული საპროცენტო განაკვეთები და ფულადი ანაბრები, ამიტომ ინვესტორებისთვის სესხი ხელსაყრელია სხვადასხვა ბანკებიდან.

წარმოვადგინოთ საპროცენტო $r^{(n)}$ - განაკვეთი, რომელიც არის $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(k)}$-ს კომბინაცია და დამოკიდებულია დროზე. ვივარაუდეთ რა, რომ $B_n = B_n^{(1)} + \dots + B_n^{(k)}$ და

$$B_n = (1+r_n)B_{n-1} \tag{5.13}$$

$r_n > 0$ და განვიხილოთ ფინანსური ბაზარი $(B, \mathrm{S}) = (B_n, \mathrm{S}_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

ვთქვათ $\pi_0 = (B_n^{(1)}, \dots, B_n^{(k)}, \gamma_n)$ არის ინვესტორის პორტფელი. სადაც $\beta_n^{(1)}, \dots, \beta_n^{(k)}$ და γ_n არის $B^{(1)}, \dots, B^{(k)}$ - აქტივების სიდიდეები და S - განსაზღვრულია შესაბამისად n მომენტში. მაშინ მასთან დაკავშირებული კაპიტალი იქნება

$$X_n^{\pi_0} = \beta_n^{(1)}\left(1+r^{(1)}\right)B_{n-1}^{(1)} + \dots + B_n^{(k)}\left(1+r^{(k)}\right)B_{n-1}^{(k)} + \gamma_n \mathrm{S}_n \tag{5.14}$$

მეორეს მხრივ თუ დავუშვებთ რომ პორტფელია $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$, სადაც β_n - არის B-ს აქტივი n - მომენტში, მაშინ გვექნება შემდეგი $X_n^{\pi} = X_n^{\pi_0}$

$$X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \gamma_n \mathrm{S}_n + \gamma_n \mathrm{S}_n = \beta_n (1 + r_n) \left(B_{n-1}^{(1)} + \dots + B_{n-1}^{(k)} \right) + \gamma_n \mathrm{S}_n \qquad (5.15)$$

თუ $\beta_n^{(1)} = \dots \beta_n^{(k)} = \beta_n$. მაშინ (5.14) და (5.15)-დან გვექნება

$$r_n = \frac{r^{(1)} B_{n-1}^{(1)} + \dots + r^{(k)} B_{n-1}^{(k)}}{B_{n-1}^{(1)} + \dots + B_{n-1}^{(k)}} \qquad (5.16)$$

5.4. ბაზრის უარბიტრაჟობა და სისრულე.რიცხვითი მაგალითი

როგორც ვიცით ბინომური მოდელით აღწერილი ფინანსური (B,S) - ბაზარი არის უარბიტრაჟო და სრული. საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ აგრეთვე უარბიტრაჟო და სრულია ობლიგაციების მრავალაქტივიანი ფინანსური (B,S) - ბაზარი (5.1) ანუ (5.4); სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

ვიგულისხმოთ, რომ (5.4) ფინანსური (B,S) - ბაზარი განსაზღვულია ფილტრირებულ ალბათურ სივრცეზე (სტოქასტურ ბაზისზე) $(\Omega, \mathcal{J}, (\mathcal{J}_n)_{n \le N} P)$. P ზომის ეკვივალენტურ P' ზომას ეწოდება მარტინგალური (რისკ-ნეიტრალური), თუ P' ზომის მიმართ სტოქასტური მიმდევრობა $(S_n | \mathrm{B}_n)_{n \le N}$ არის მარტინგალური. ასეთი ზომების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathbb{P}^*$ სიმბლოთი.

თეორემა 5.1 (მარტინგალობის კრიტერიუმი). ვთქვათ, ვიხილავთ (5.4) ფინანსურ (B,S) - ბაზარს და (5.3) ტოლობით განსაზღვრული r_n სიდიდეები ისეთია, რომ $r_n > -1$, მაშინ P'ϵ $\mathbb{P}^*$ ზომის მიმართ სამართლიანია იმპლიკაცია:

$R_n = \frac{S_n}{B_n}$ მარტინგალია $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(\rho_k - r_k) -$ მარტინგალია.

დამტკიცება: წარმოვადგინოთ შემდეგი დამოკიდებულებები:

$u_n = \sum_{k=0}^{n} r_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} \rho_k$

ამ ცვლადებით ობლიგაციების B_n - ფასები და S_n - აქტივები შეიძლება ჩაიწეროს სტოქასტური განმარტებით:

$B_n = B_0\varepsilon(u),\ S_n = S_0\varepsilon(V)$

სტოქასტური განმარტებები შემდეგია:

$$\varepsilon_n(u) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta\, u_k),\ \ \varepsilon_0(u) = 1$$

$$\varepsilon_n(V) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta\, V_k),\ \ \varepsilon_0(V) = 1$$

შემდგომში სტოქასტური განმარტებების და თეორემა 2.5-ის მიხედვით შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$R_n = \frac{S_n}{B_n}$=$R_0\varepsilon_n(v)\varepsilon_n{}^{-1}$(u)= $R_0\varepsilon_n(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta V_k - \Delta U_k}{1+\Delta U_k})$,

საბოლოო ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ R_n- არის ლოკალური მარტინგალი ,თუ მხოლოდ და მხოლოდ $\sum_{k=0}^{n}(\rho_k - r_k)$.

საინტერესოა დამოკიდებულება (B, S) - ბაზრის არბიტრაჟსა და მარტინგალის ალბათურ ზომას შორის $P^* \in \mathbb{P}^*$. შემდეგი თეორემა გვაძლევს ამ კითხვაზე პასუხს.ვთქვათ, SF_{arb} აღნიშნავს თვითდაფინანსებადი და არბიტრაჟული პორტფელების კლასს.

თეორემა 5.2. ვთქვათ, ვიხილავთ (5.4) მოდელს და $r_n > -1, n \leq N$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი იმპლიკაცია:

$$\mathbb{P}^* \neq \emptyset \Leftrightarrow SF_{arb} = \emptyset$$

დამტკიცება: აუცილებლობა თუ $P^* \in \mathbb{P}^*$, მაშინ ნებისმიერ თვითდაფინანსებადი სტრატეგიისთვის $\pi \in SF$, გვაქვს

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n = r_n X_{n-1}^\pi + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r_n)$$

აქედან გამომდინარე u_n- არის განსაზღვრული, ის გამომდინარეობს მარტინგალის თვისებიდან P^*-ზე და თეორემა 1-დან, თუ $X_0^\pi = 0$, მაშინ

$$E^* X_n^\pi = \varepsilon_n(u) E^* = X_0^\pi = 0, \quad n \in N \tag{5.17}$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $SF_{azb} = \emptyset$ და $\pi \in SF_{azb}$, მაშინ ზომა P და P^* ექვივალენტებია, ჩვენ ვიღებთ $E^* X_n^\pi > 0$, რომელიც ეწინააღმდეგება (7)-ს, ამრიგად აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ საკმარისობა.

ვთქვათ $SF_{azb} = \emptyset$, შევნიშნოთ, რომ ამ ფაქტის დამტკიცება იგივეა რაც (3)-ის, გვჭირდება შემდეგი განტოლების დამტკიცება.

$$E^*\left(\frac{S_r}{B_r} - \frac{S_0}{B_0}\right) = 0 \tag{5.18}$$

სადაც $r = r(\omega)$ არის გაჩერების დრო, მნიშვნელობებით 0, 1, ... , N და (S_n/B_n, $\mathcal{F}_n, P^*$) არის მარტინგალი. ჩვენ შეგვიძლია ავარჩიოთ გაჩერების დროდ r^* და შევადგინოთ თანმიმდევრობა $\pi^* = (\pi_n^*)$, ისე რომ $E^* X_n^\pi = 0$ [3], შემდეგ ადვილად დავინახავთ, რომ

$$0 = E^* X_N^\pi = E^*(\beta_N B_N + \gamma_N^* S_N) = B_N E^*\left(\frac{S_{r^*}}{B_{r^*}} - \frac{S_0}{B_0}\right)$$

თუ $B_N \neq 0$, მაშინ ბოლო ტოლობა ამტკიცებს (8)-ს. ამრიგად საკმარისობა დამტკიცებულია და შესაბამისად თეორემა 2-იც.

ქვემოთ მოყვანილ თეორემაში ნაჩვენებია კავშირი ცალსახა ალბათურ ზომასა და ფინანსური ბაზრის სისრულეს შორის. ფინანსური (B,S) - ბაზარი (5.4) სრულია, თუ

ნებისმიერი J - ზომადი გადახდის ფუნქციისთვის f_N მოიძებნება ისეთი თვითდაფინანსებადი სტრატეგია $\pi_n \epsilon SF$, რომ $X_N^\pi = f_N$.

თეორემა 15.3. ვთქვათ ვიხილავთ ფინანსური (B,S) - ბაზრის (15.4) მოდელს და P'ϵ $\mathbb{P}^*$, სადაც $\mathbb{P}^* \neq \emptyset$. მაშინ შემდეგი მტკიცებულება ეკვივალენტურია:

1) (B,S) - ბაზარი სრულია,

2) P'ϵ $\mathbb{P}^*$ ზომა ერთდერთია $\mathbb{P}^*$ კლასში.

დამტკიცება: 1⟹ 2 დავუშვათ, რომ გვაქვს ორი ზომა $P^* \in \mathbb{P}^*$, $P^{**} \in \mathbb{P}^*$ და $P^*(A) \neq P^{**}(A), \ \ A \in \mathcal{F}$.

თუ $f(\omega) = I_A(\omega) B_N$, მაშინ გვაქვს $\pi \in SF$ და $p\{X_N^\pi = I_A B_N\} = 1$ და

$$P^*\{X_N^\pi = I_A B_N\} = P^{**}\{X_N^\pi = I_A B_N\} = 1$$

$$E^* \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_0^\pi}{B_0}, \qquad E^{**} \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_0^\pi}{B_0}$$

მაშასადამე, $E^* I_A = E^{**} I_A$ და $P^*(A) = P^{**}(A)$, ასე რომ ჩვენ ვიღებთ საწინააღმდეგოს და 2→ 1 - დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ 2⟹1. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ ზომა $P^* \in \mathbb{P}^*$ არის ცალსახა მარტინგალური ზომა, მაშინ (B, S) - ბაზარი არის სრული, ეს მტკიცდება თეორემა 3-ის ანალოგიურად. კერძოდ, $(\Omega, \mathcal{F})$- სივრცეში განისაზღვრება ორი სახის შემთხვევითი სიდიდეები.

$\varphi_1 = \{\xi: \quad სადაც \quad \pi \in SF, \quad X_0^\pi = 0, \ X_N^\pi = \xi\}$

$\varphi_2 = \{\xi: E^* \xi = 0\}$

აქედან 2) $\Rightarrow \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \Rightarrow$ 1), ამრიგად 2) $\Rightarrow$ 1 დამტკიცებულია.

რიცხვითი მაგალითი

განვიხილოთ ევროპული ოფციონის გამოთვლის რიცხვითი მაგალითი ორი სხვადასხვა სარგებლისთვის k=2, ჩვენ ვხსნით ორნაბიჯიან ამოცანას ამიტომ N=2, n=0,1,2 და ამოღებული თანხა გამოისახება შემდეგნაირად

$$f_2 = f(S_2) = \max(S_2 - K, 0).$$

განვიხილოთ (5.11) და (5.12) მოდელი შემდეგი საწყისი მონაცემებით:

$$B_0^{(1)} = 30, r^{(1)} = \frac{1}{5},\ B_0^{(2)} = 20, r^{(2)} = \frac{1}{2}$$

$$S_0 = 100, a = -\frac{2}{5}, b = \frac{3}{5}, K = 100$$

ასევე დავუშვათ რომ არსებობს ალბათური ზომა

$$P_n^* = \frac{r_n - a}{b - a}$$

სადაც r_n განსაზღვრულია (5.16) ტოლობით k=2 თვის,

ახლა გამოვთვალოთ ორნაბიჯიანი ხის პარამეტრები

1+$r^{(1)} = \frac{6}{5}, r_1 = \frac{8}{25}, p_1^* = \frac{18}{25},\ 1 + r_1 = \frac{33}{25};$

$$B_1^{(1)} + B_1^{(2)} = 36 + 30 = 66 = \frac{33}{25} \cdot 50 = 66.$$

$$r_2 = \frac{37}{110}, 1 + r_2 = \frac{147}{110}, p_2^* = \frac{81}{110};$$

$$B_2^{(1)} + B_2^{(2)} = \frac{216}{5} + 45 = \frac{441}{5} = \frac{147}{110} \cdot 66 = \frac{441}{5},$$

$$C_{10} = (1 + r_2)^{-1}[p_2^* f_{21} + (1 - p_2^*) f_{20}] = 0,$$

$$C_{11} = (1 + r_2)^{-1}[p_2^* f_{22} + (1 - p_2^*) f_{21}] = \frac{27 \cdot 156}{49},$$

$$C_2 = (1 + r_1)^{-1}[p_1^* C_{11} + (1 - p_1^*) C_{10}] = \frac{6 \cdot 27 \cdot 156}{11 \cdot 49},$$

$n = 0$ მომენტში ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$;

$$\beta_1^* = \frac{(1 + b)C_{10} - (1 + a)C_{11}}{(1 + r_1)(b - a)\left(B_0^{(1)} + B_0^{(2)}\right)} = -\frac{27 \cdot 156}{11 \cdot 10 \cdot 49},$$

$\gamma_1^* = \frac{(C_{11}-C_{10})}{(b-a)S_0} = \frac{27\cdot156}{100\cdot49}$.

მინიმალური ჰეჯის თავდაპირველი მნიშვნელობა ტოლია

$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* \left(B_0^{(1)} + B_0^{(2)}\right) + \gamma_1^* S_0 = \frac{6\cdot27\cdot156}{11\cdot49} = C_2$

ილუსტრაციისთვის განიხილება შემთხვევა, *როცა* $S_0 \to S_{11}$ და შემდეგ $S_{11} \to S_{21}$ ან $S_{11} \to S_{22}$.

$n = 1$ მომენტში ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$.განხილული შემთხვევისთვის გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,1} - (1+a)f_{2,2}}{(1+r_2)(b-a)\left(B_1^{(1)} + B_1^{(2)}\right)} = -\frac{22\cdot156}{66\cdot49},$$

$\gamma_2^* = \frac{(f_{2,2}-f_{2,1})}{(b-a)S_{1,1}} = \frac{156}{160}$.

$n = 1$ მომენტში $S_{1,1}$-თვის ჰეჯის აგებისას ინვესტორის კაპიტალი იქნება

$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* \left(B_1^{(1)} + B_1^{(2)}\right) + \gamma_2^* S_{1,1} = C_{1,1} = \frac{27\cdot156}{49}$,

$n = 2$ მომენტში $S_{2,2}$ და $S_{2,1}$-თვის გვექნება

$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* \left(B_2^{(1)} + B_2^{(2)}\right) + \gamma_2^* S_{2,2} = f_{2,2} = 156$

$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* \left(B_2^{(1)} + B_2^{(2)}\right) + \gamma_2^* S_{2,1} = f_{2,2} = 0$

ლიტერატურა

1. შირიაევი ა., ალბათობა -1; 2, თსუ, თბილისი, 2017.
2. Щиряев А, Основы стохастической финансовой математики>, т.1; 2; "Фазис", Москва, 1998.
3. დოჭვირი ბ., ფინანსური მათემატიკა. ალბათობა, სტატისტიკა, თსუ, თბილისი, 2012.
4. Мельников А., Финансовые рынки, ТВП, Москва, 1997.
5. ლაზრიევა ნ., მანია მ., მირზაშვილი გ., ტორონჯაძე თ., ღლონტი ო., ჯამბურია ლ., ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები, ფონდი "ევრაზია", თბილისი, 1999.
6. ღლონტი ო., სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა, თსუ, თბილისი, 2002.
7. Babilua P., Dochviti B., Khechiashvili Z., On one diskrete model of the FinancialMarket, Bull. Georg. N ation. Acad. Scien., Vol. 10, no. 4, 2016, p. 21-26.
8. ფურთუხია ო., შემთხვევით პროცესთა თეორია, თსუ, თბილისი, 2009.
9. ფურთუხია ო., ალბათურ-სტატისტიკური ამოცანები, თსუ, თბილისი, 2012.
10. დოჭვირი ბ., ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონი, თსუ, თბილისი, 2005.
11. Ширяев А., Кабанов Ю., Крамров Д., Мельников А., К теории расчётов опционов Европейского и Американского типов, ТВП, 1994, т.39, №1, стр. 21-129.
12. Cox J.,Ross S., Rubinstein M., Option pricing: a simplified approach, Journal of Finantial Economics,1979,V.7 #3, p.229-263.
13. Hull J.,Options, futures and other derivate securities, Prentice Hall, New Jersey, 1997.
14. Musiela M., Rustkowski M., Martingale Methods in financial modeling, Aplications of Mathematics, V.36; Springer-Verlag,1997.
15. Dochviri B.,Khechinashvili Z., Bokhashvili N., on the multidimensional Financial (B,S) market,Reports of Enlarged Sessions of the seminar of I.vekua Institute of applied Mathematics, V.21, 2017.