ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

დოქტორანტი : გეგა გულაღაშვილი

ხელმძღვანელი : გია გიორგაძე

სარჩევი

ვექტორული ფიბრაციის კანონიკური გაგრძელების გახლეჩვის ტიპის შესახებ

განვიხილოთ წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა : $\dfrac{dy}{dz} = A(z)y$

უცნობთა წრფივი გარდაქმნის საშუალებით ეს განტელებათა სისტება მიიყვანება შემდეგ განტოელბათა სისტემაზე :

წრფივი გარდაქმნა $y_1 = T(z)y$ ე. ი. $y = T^{-1}(z)y_1$ და $\dfrac{dy_1}{dz} = \dfrac{dT(z)}{dz}y + T(z)\dfrac{dy}{dz}$ ე. ი.

$T(z)\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{dy_1}{dz} - \dfrac{dT(z)}{dz}y$ ხოლო $T(z)\dfrac{dy}{dz} = T(z)A(z)y$ ე. ი. $\dfrac{dy_1}{dz} - \dfrac{dT(z)}{dz}y = T(z)A(z)y$ ე. ი.

$\dfrac{dy_1}{dz} = \dfrac{dT(z)}{dz}y + T(z)A(z)y$ ე. ი.

$$\frac{dy_1}{dz} = \frac{dT(z)}{dz}T^{-1}(z)y_1 + T(z)A(z)T^{-1}(z)y_1 = \left(T(z)A(z)T^{-1}(z) + \frac{dT(z)}{dz}T^{-1}(z)\right)y_1$$

$\dfrac{dy_1}{dz} = A_1(z)y_1$ სადაც $A_1(z) = T(z)A(z)T^{-1}(z) + \dfrac{dT(z)}{dz}T^{-1}(z)$

როდესაც $T(z) = \mathrm{const}$ გამოდის, რომ $\dfrac{dT(z)}{dz} = 0$ ე. ი. $A_1(z) = T(z)A(z)T^{-1}(z)$ ე. ი.

$\dfrac{dy_1}{dz} = T(z)A(z)T^{-1}(z)y_1$.

ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემისათვის უცნობების წრფივი გარდაქმნა არის შემდეგნაირი :

$\dfrac{dy}{dz} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{z - a_k}\right)y$ ფუქსის ტიპის სისტემა. აქ , $A(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{z - a_k}$ გარდაქმნა $y_1 = T(z)y$

$$A_1(z) = T(z)\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{z - a_k}\right)T^{-1}(z) + \frac{dT(z)}{dz}T^{-1}(z) = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{T(z)B_kT^{-1}(z)}{z - a_k}\right) + \frac{dT(z)}{dz}T^{-1}(z)\ .$$

$\dfrac{dy_1}{dz} = \left(\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{T(z)B_kT^{-1}(z)}{z - a_k}\right) + \frac{dT(z)}{dz}T^{-1}(z)\right)y_1$ ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემა

გარდაქმნის შემდეგ.

როდესაც $T(z) = \mathrm{const}$, ესეთი წრფივი გარდაქმნით $y_1 = T(z)y$ ფუქსის ტიპის განტოელებათა

სისტემა გახდება $\dfrac{dy_1}{dz}=\left(\sum_{k=1}^{m}\dfrac{TB_kT^{-1}}{z-a_k}\right)y_1$ ისევ ფუქსის ტიპის განტოელბათა სისტემა TB_kT^{-1} მუდმივი მატრიცებია $\forall k\in\{1\ \dots\ m\}$.

$$\underbrace{B_1\dots B_k\dots B_m}_{\substack{\text{გარდაქმნამდე}\\ \text{მატრიცები}}}\xrightarrow{\text{გარდაქმნა } y_1=Ty}\underbrace{TB_1T^{-1}\ \dots\ TB_kT^{-1}\ \dots\ TB_mT^{-1}}_{\substack{\text{გარდაქმნის შემდეგ}\\ \text{მატრიცები}}}$$

$$\underbrace{B_1\dots B_k\dots B_m}_{\substack{\text{გარდაქმნამდე}\\ \text{მატრიცები}}}\xrightarrow{\text{გარდაქმნა } y_1=T(z)y}\underbrace{T(z)B_1T^{-1}(z)\dots T(z)B_kT^{-1}(z)\dots T(z)B_mT^{-1}(z)\text{ და }\frac{dT(z)}{dz}T^{-1}(z)}_{\substack{\text{გარდაქმნის შემდეგ}\\ \text{მატრიცები}}}$$

როგორ მუშაობს ალგორითმი :

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა სამი განსაკუთრებული წერთილით, ესენია $\{2;\ 0;1\}$

$$\frac{dy}{dz}=\left(\frac{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}}{z-2}+\frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{3}{4} & 2\end{pmatrix}}{z-0}+\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-1}\right)y$$

განტოლებათა სისტემის მატრიცები $B_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$; $\quad B_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{3}{4} & 2\end{pmatrix}$; $\quad B_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

B_1 მატრიცისათვის ვეძებთ მის მსგავს ჟორდანის მატრიცას . $B_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ მატრიცა მსგავსია $B_1'=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ჟორდანის მატრიცის, კერძოდ :

გარდაქმნის მატრიცაა $S=\begin{pmatrix}x & 2z\\ z & 0\end{pmatrix}$ $x,z\in C\backslash\{0\}$; $\det(S)=-2z^2$ ე.ი. $S^{-1}=\frac{1}{-2z^2}\begin{pmatrix}0 & -2z\\ -z & x\end{pmatrix}$

$B_1=S^{-1}B_1'S$.

მართლაც $\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{-2z^2}\begin{pmatrix}0 & -2z\\ -z & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 2z\\ z & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2z}\\ -\frac{3}{4z} & \frac{z+\frac{3}{2}x}{2z^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 2z\\ z & 0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ -\frac{3x}{4z}+\frac{z+\frac{3}{2}x}{2z} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ -\frac{3x}{4z}+\frac{z}{2z}+\frac{\frac{3}{2}x}{2z} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ -\frac{3x}{4z}+\frac{1}{2}+\frac{3x}{4z} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

ე.ი. $B_1=S^{-1}B_1'S$ ამის გამო $B_1'=SB_1S^{-1}$

S გარდაქმნის მატრიცად კონკრეტულად განვიხილოთ მატრიცა $S=\begin{pmatrix}x & 2z\\ z & 0\end{pmatrix}$, როცა $x=0$ და $z=\frac{1}{2}$ ე.ი. გარდაქმნის მატრიცა იქნება ესეთი $\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$. განტოლებათა სისტემის B_1 მატრიცა მიგვყავს ჟორდანის ნორმალურ სახეზე.

პირველი გარდაქმნის მატრიცა არის შემდეგი მატრიცა :

$$T_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix};\quad T_1^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}0 & -1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა მუდმივია ამის გამო :

$$\underbrace{B_1;\ B_2;\ B_3}_{\text{გვაქვს მატრიცები}}\qquad \underbrace{y_1=T_1y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}y}_{\text{გვაქვს გარდაქმნა და ამ გარდაქმნის საშუალებით}}\quad\rightarrow\quad \underbrace{T_1B_1T_1^{-1};\ T_1B_2T_1^{-1};\ T_1B_3T_1^{-1}}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}}$$

$$B_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad T_1B_1T_1^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{B}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{3}{4} & 2\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathrm{T}_1\mathrm{B}_2\mathrm{T}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{3}{4} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4} & 2\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{B}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathrm{T}_1\mathrm{B}_3\mathrm{T}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

ამ გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას :

$$\frac{\mathrm{dy}_1}{\mathrm{dz}}=\left(\frac{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}}{\mathrm{z}-2}+\frac{\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{\mathrm{z}-0}+\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{\mathrm{z}-1}\right)\mathrm{y}_1$$

მიღებული განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $\mathrm{B}_1'=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$; $\mathrm{B}_2'=\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\mathrm{B}_3'=$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა არის ისევ ისეთივე რანაიც წინა (აქ, საწყის) განტოლებათა სისტემა იყო – ისევ ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემა.

მეორე გარდაქმნის მატრიცის ასაგებად გვჭირდება B_1' მატრიცის მახასიათებელი ფესვების

რეალური ნაწილების მთელი ნაწილების ნიშნები .

$$\det(B_1' - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} - \lambda \end{pmatrix}\right) = \left(-\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{3}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2 \text{ ე.ი. } \lambda_1 = \lambda_2 =$$

$$= -\frac{3}{2} \text{ ე.ი. } [\mathrm{Re}(\lambda_1)] = [\mathrm{Re}(\lambda_2)] = -2\,;$$ ამის გამო მეორე გარდაქმნის მატრიცა განისაზღვრება :

$$D = \mathrm{diag}(1;1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ a_1 = 2 \ \Rightarrow\ (z - a_1)^D = (z-2)^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z-2)^1 & 0 \\ 0 & (z-2)^1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix}.$$

მეორე გარდაქმნის მატრიცა :

$$T_2(z) = (z - a_1)^D = (z-2)^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \text{ ე.ი.}$$

$$T_2(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \text{ და } T_2^{-1}(z) = \frac{1}{(z-2)^2}\begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა არაა მუდმივი მატრიცა, ამის გამო :

$$\underbrace{B_1';\ B_2';\ B_3'}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \qquad \underbrace{y_2 = T_2(z) y_1 = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} y_1}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{T_2(z) B_1' T_2^{-1}(z);\quad T_2(z) B_2' T_2^{-1}(z);\quad T_2(z) B_3' T_2^{-1}(z) \ \text{ და } \ \frac{dT_2(z)}{dz} T_2^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}}$$

$$B_1' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_2(z) B_1' T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}(z-2) & z-2 \\ 0 & -\frac{3}{2}(z-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B_2' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to T_2(z)B_2'T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(z-2) & -\frac{3}{2}(z-2) \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_3' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to T_2(z)B_2'T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(z-2) & \frac{1}{2}(z-2) \\ 0 & -\frac{1}{2}(z-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dT_2(z)}{dz} = \begin{pmatrix} (z-2)' & 0' \\ 0' & (z-2)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ე.ი.}$$

$$\frac{dT_2(z)}{dz}T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-2}.$$

ამ გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას შემდეგი სახის :

$$\frac{dy_1}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-2} \right) y_1 =$$

$$=\left(\frac{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}+1 & 1\\ 0 & -\frac{3}{2}+1\end{pmatrix}}{z-2}+\frac{\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{z-0}+\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-1}\right)y_1$$

$$=\left(\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-2}+\frac{\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{z-0}+\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-1}\right)y_1 \ .$$

ე. ი. ამ გარდაქმნის შემდეგ მიიღება ფუქსის ტიპის წრფივ განტოლებათა სისტემა იგივე განსაკუთრებული წერტილებით

$$\frac{dy_1}{dz}=\left(\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-2}+\frac{\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{z-0}+\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-1}\right)y_1$$

მიღებული განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $B_1''=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $B_2''=\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $B_3''=$

$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

მიღბულ განტოლებათა სისტემაში ვამოწმებთ B_1'' მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობების მთელი ნაწილები იმყოფებიან თუ არა ინტერვალში $[0;1)$:

$\det(B_1''-\lambda E)=\det\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-\lambda & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}-\lambda\end{pmatrix}\right)=\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2$ ე. ი. $\lambda_1=\lambda_2=$

$=-\frac{1}{2}$ ე. ი. $[\mathrm{Re}(\lambda_1)]=[\mathrm{Re}(\lambda_2)]=-1\notin [0;1)$; ამის გამო ვაგრძელებთ მსჯელობას .

B_1'' მატრიცისათვის ვეძებთ მის მსგავს ჟორდანის მატრიცას. $B_1'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ და ჟორდანის

მატრიცა, ამის გამო განტოლებათა სისტემის პირველი მატრიცა უკვე მიყვანილია ჟორდანის ნორმალურ სახეზე.

ვატარებთ გარდაქმნას : მახასიათებელი ფესვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილების შეცვლას, ისე რომ მიღებული რიცხვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები მოხვდნენ $[0; 1)$ ინტერვალში .

$$\det(B_1'' - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ ე.ი. } \lambda_1 = \lambda_2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \text{ ე.ი. } [\mathrm{Re}(\lambda_1)] = [\mathrm{Re}(\lambda_2)] = -1 \textit{ ამის გამო} :$$

$$D = \mathrm{diag}(1; 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ a_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad (z - a_1)^D = (z - 2)^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z-2)^1 & 0 \\ 0 & (z-2)^1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{pmatrix}.$$

მესამე გარდაქმნის მატრიცა :

$$T_3(z) = (z - a_1)^D = (z - 2)^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{pmatrix} \text{ ე.ი. } T_3^{-1}(z) = \frac{1}{(z-2)^2}\begin{pmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა არაა მუდმივი მატრიცა, ამის გამო :

$$\underbrace{B_1'';\ B_2'';\ B_3''}_{\text{გვაქვს მატრიცები}} \qquad \underbrace{y_3 = T_3(z)y_2 = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} y_2}_{\text{გვაქვს გარდაქმნა და ამ გარდაქმნის საშუალებით}}$$

$$\to \quad \underbrace{T_3(z)B_1''T_3^{-1}(z);\quad T_3(z)B_2''T_3^{-1}(z);\quad T_3(z)B_3''T_3^{-1}(z) \quad \text{და} \quad \frac{dT_3(z)}{dz}T_3^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}}$$

გამოვიყენოთ მატრიცული ტოლობა $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta \\ a\gamma & a\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

$$B_1'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ \to \ T_3(z)B_1''T_3^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B_2'' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \to \ T_3(z)B_2''T_3^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_3'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ \to \ T_3(z)B_3''T_3^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dT_3(z)}{dz} = \begin{pmatrix} (z-2)' & 0' \\ 0' & (z-2)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ე.ი.}$$

$$\frac{dT_3(z)}{dz} T_3^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-2}.$$

$$\frac{dy_3}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-2} \right) y_3 =$$

$$= \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_3 =$$

$$= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_3$$

ამ გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ შემდეგი სახის წრფივ განტოლებათა სისტემას :

$$\frac{dy_3}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_3$$

მიღებული განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $B_1''' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $B_2''' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B_3''' =$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\det(B_1''' - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ ე.ი. } \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \text{ ე.ი.}$$

$[\mathrm{Re}(\lambda_1)] = [\mathrm{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0; 1)$ ამის გამო გადავდივართ მიღებულ განტოლებათა სისტემის მეორე მატრიცაზე .

ამ გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ შემდეგი სახის წრფივ განტოლებათა სისტემას :

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y$$

განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

B_2 მატრიცისათვის ვეძებთ მის მსგავს ჟორდანის მატრიცას . $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ მატრიცა მსგავსია $B_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ჟორდანის მატრიცის, კერძოდ :

გარდაქმნის მატრიცაა $S = \begin{pmatrix} x & -\frac{3}{2}x \\ 0 & t \end{pmatrix}$ $x, t \in C\backslash\{0\}$; $\det(S) = xt$ ე.ი. $S^{-1} = \frac{1}{xt}\begin{pmatrix} t & \frac{3}{2}x \\ 0 & x \end{pmatrix}$

$B_2 = S^{-1} B_2' S$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{xt}\begin{pmatrix} t & \frac{3}{2}x \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -\frac{3}{2}x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & \frac{3}{2t} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -\frac{3}{2}x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S გარდაქმნის მატრიცად კონკრეტულად განვიხილოთ მატრიცა $S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, როცა $x = 1$ და $z = 1$ ე.ი. გარდაქმნის მატრიცა იქნება ესეთი $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

განტოლებათა სისტემის B_2 მატრიცა მიგვყავს ჟორდანის ნორმალურ სახეზე.

მეოთხე გარდაქმნის მატრიცა არის შემდეგი მატრიცა :

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad T_4^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა მუდმივია ამის გამო :

$$\underbrace{B_1;\ B_2;\ B_3}_{\text{გვაქვს მატრიცები}} \qquad \underbrace{y_1 = T_4 y = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y}_{\text{გვაქვს გარდაქმნა და ამ გარდაქმნის საშუალებით}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{T_4B_1T_4^{-1};\ T_4B_2T_4^{-1};\ T_4B_3T_4^{-1}}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad T_4B_1T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad T_4B_2T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad T_4 B_3 T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ამ გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას :

$$\frac{dy_1}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_1$$

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $B_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $B_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B_3' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\det(B_2' - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (2-\lambda)(1-\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$ ე.ი. $\lambda_1 = 2$ და $\lambda_2 = 1$ ე.ი.

$[\mathrm{Re}(\lambda_1)] = 2 \notin [0;1)$ და $[\mathrm{Re}(\lambda_2)] = 1 \notin [0;1)$ ამის გამო მეორე გარდაქმნის მატრიცა განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$$D = \mathrm{diag}(-1;-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \ a_2 = 0 \ \Rightarrow \ (z-a_2)^D = (z-0)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z-0)^{-1} & 0 \\ 0 & (z-0)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

მეხუთე გარდაქმნის მატრიცა არის შემდეგი მატრიცა :

$$T_5(z) = (z - a_2)^D = (z - 0)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z-0)^{-1} & 0 \\ 0 & (z-0)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

$$\text{ე. ი.} \quad T_5^{-1}(z) = \frac{1}{\frac{1}{z^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = z^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა არაა მუდმივი მატრიცა, ამის გამო :

$$\underbrace{B_1';\ B_2';\ B_3'}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \qquad \underbrace{y_2 = T_5(z)y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} y_1}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{T_5(z)B_1'T_5^{-1}(z);\quad T_5(z)B_2'T_5^{-1}(z);\quad T_5(z)B_3'T_5^{-1}(z) \quad \text{და} \quad \frac{dT_5(z)}{dz}T_5^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}}$$

გამოვიყენოთ მატრიცული ტოლობა $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta \\ a\gamma & a\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

$$B_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ \rightarrow\ T_5(z)B_1'T_5^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow\ T_5(z)B_2'T_5^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_3' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \ T_5(z)B_3'T_5^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dT_5(z)}{dz} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{z}\right)' & 0' \\ 0' & \left(\frac{1}{z}\right)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix} \text{ე. ი.}$$

$$\frac{dT_5(z)}{dz}T_5^{-1}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z-0}.$$

$$\frac{dy_2}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z-0} \right) y_2 =$$

$$= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2 = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2 .$$

ამ გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას შემდეგი სახის :

$$\frac{dy_2}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2$$

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $B_1'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $B_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B_3'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\det(B_2'' - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)(0-\lambda) = (\lambda - 1)\lambda$ ე. ი. $\lambda_1 = 1$ და $\lambda_2 = 0$ ე. ი. $[\mathrm{Re}(\lambda_1)] = 1 \notin [0;1)$ და $[\mathrm{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0;1)$ ამის გამო ვაგრძელებთ მსჯელობას ისევ მიღებული განტოლებათა სისტემის მეორე მატრიცისათვის .

B_2'' მატრიცისათვის ვეძებთ მის მსგავს ჟორდანის მატრიცას. $B_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ამის გამო B_2'' თვითონაა ჟორდანის მატრიცა, ე. ი. მიღებული განტოლებათა სისტემის მეორე მატრიცა მიყვანილია ჟორდანის ნორმალურ სახეზე . ამის გამო ვსაზღვრავთ შემდეგი გარდაქმნის მატრიცას .

$$D = \mathrm{diag}(-1;0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ a_2 = 0\ \Rightarrow\ (z - a_2)^D = (z-0)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z-0)^{-1} & 0 \\ 0 & (z-0)^0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

მეექვსე გარდაქმნის მატრიცა არის შემდეგი მატრიცა :

$$T_6(z) = (z - a_2)^D = (z-0)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z-0)^{-1} & 0 \\ 0 & (z-0)^0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ე. ი. $T_6^{-1}(z) = \dfrac{1}{\frac{1}{z}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

ეს მატრიცა არაა მუდმივი მატრიცა, ამის გამო :

$$\underbrace{B_1'';\ B_2'';\ B_3''}_{\substack{\text{გვაქვს}\\ \text{მატრიცები}}} \qquad \underbrace{y_3 = T_6(z)y_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_2}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და}\\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\to \quad \underbrace{T_6(z)B_1''\,T_6^{-1}(z);\quad T_6(z)B_2''\,T_6^{-1}(z);\quad T_6(z)B_3''\,T_6^{-1}(z)\ \ \text{და}\ \ \frac{dT_6(z)}{dz}\,T_6^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}}$$

$$B_1'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ \to\ T_6(z)B_1''\,T_6^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2z} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0}.$$

$$B_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \to\ T_6(z)B_2''\,T_6^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B_3'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ \to\ T_6(z)B_3''\,T_6^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2z} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0}.$$

$$\frac{dT_6(z)}{dz} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{z}\right)' & 0' \\ 0' & (1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dT_6(z)}{dz}T_6^{-1}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0}.$$

$$\frac{dy_3}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} \right) y_3 =$$

$$= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_3 = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_3.$$

ამ გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას :

$$\frac{dy_3}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_3$$

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცაა $B(z) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{z(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & -\frac{1}{z(z-1)} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2}\right) \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z}-\frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix}.$$

ეს წრფივ განტოლებათა სისტემა არის ფუქსის $\{2;\ 0; 1\}$ წერტილებში, რომელიც ექვივალენტურია შემდეგი წრფივ განტოლებათა სისტემის :

$$B_1=\operatorname*{res}_{a_1} B(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-a_1|=r\}} B(z)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z}-\frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z}-\frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\frac{1}{2(z-2)}dz & \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}\right)dz \\ \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}0dz & \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\frac{1}{2(z-2)}dz \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}0dz & \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}0dz \\ \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}0dz & \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}0dz \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}-\frac{1}{2(z-1)}dz & \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)dz \\ \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}0dz & \oint_{\{z:\,|z-2|=r\}}\frac{1}{2(z-1)}dz \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}2\pi i & \frac{1}{2}2\pi i\\ 0 & \frac{1}{2}2\pi i\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$B_2=\operatorname*{res}_{a_2}B(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-a_2|=r\}}B(z)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\frac{1}{2(z-2)}dz & \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}\right)dz\\ \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}0dz & \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\frac{1}{2(z-2)}dz\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}0dz & \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}0dz\\ \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}0dz & \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}0dz\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}-\frac{1}{2(z-1)}dz & \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)dz\\ \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}0dz & \oint_{\{z:\,|z-0|=r\}}\frac{1}{2(z-1)}dz\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}2\pi i\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & 2\pi i\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$B_3 = \operatorname*{res}_{a_3} B(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\{z:\,|z-a_3|=r\}} B(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \frac{1}{2(z-2)} dz & \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}\right) dz \\ \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} 0dz & \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \frac{1}{2(z-2)} dz \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} 0dz & \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} 0dz \\ \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} 0dz & \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} 0dz \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} -\frac{1}{2(z-1)} dz & \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) dz \\ \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} 0dz & \oint\limits_{\{z:\,|z-1|=r\}} \frac{1}{2(z-1)} dz \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) 2\pi i & (-1)2\pi i \\ 0 & \frac{1}{2} 2\pi i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

წრფივ განტოლებათა სისტემა :

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y$$

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

მსჯელობას ვაგრძელებთ ამ წრფივ განოტოლებათა სისტემისათვის, რომელიც არის საწყისის მსგავსი წრფივ განტოლებათა სისტემა.

$\det(B_2 - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} 0-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}\right) = (0-\lambda)(0-\lambda) = \lambda^2$ ე.ი. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ე.ი.

$[\mathrm{Re}(\lambda_1)] = [\mathrm{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0;1)$ ამის გამო გადავდივართ მიღებული განტოლებათა სისტმის

შემდეგ B_3მატრიცაზე .

განვსაზღვროთ შემდეგი გარდაქმნის მატრიცა.

$B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ მატრიცა მსგავსია ჟორდანის მატრიცის $B_3' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

გარდაქმნის მატრიცაა $S = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & t \end{pmatrix}$ $x, t \in C\backslash\{0\}$; $\det(S) = xt$ ე.ი. $S^{-1} = \frac{1}{xt}\begin{pmatrix} t & -x \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{t} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$

$B_3 = S^{-1}B_3'S$.

მართლაც $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{t} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2x} & -\frac{1}{2t} \\ 0 & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

ე.ი. $B_3 = S^{-1}B_3'S$ ამის გამო $B_3' = SB_3S^{-1}$.

S გარდაქმნის მატრიცად კონკრეტულად განვიხილოთ მატრიცა $S = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & t \end{pmatrix}$, როცა $x = 1$ და $t = 1$ ე.ი. გარდაქმნის მატრიცა იქნება ესეთი $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. განტოლებათა სისტემის B_3 მატრიცა მიგვყავს

ჟორდანის ნორმალურ სახეზე.

მეშვიდე გარდაქმნის მატრიცა არის შემდეგი მატრიცა :

$$\mathrm{T}_7=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\ ;\ \mathrm{T}_7^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა მუდმივია ამის გამო :

$$\underbrace{\mathrm{B}_1;\ \mathrm{B}_2;\ \mathrm{B}_3}_{\substack{\text{გვაქვს}\\ \text{მატრიცები}}}\qquad\underbrace{\mathrm{y}_1=\mathrm{T}_7\mathrm{y}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\mathrm{y}}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და}\\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}\quad\rightarrow\quad\underbrace{\mathrm{T}_7\mathrm{B}_1\mathrm{T}_7^{-1};\ \mathrm{T}_7\mathrm{B}_2\mathrm{T}_7^{-1};\ \mathrm{T}_7\mathrm{B}_3\mathrm{T}_7^{-1}}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}}$$

$$\mathrm{B}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathrm{T}_7\mathrm{B}_1\mathrm{T}_7^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{B}_2=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathrm{T}_7\mathrm{B}_2\mathrm{T}_7^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{B}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\rightarrow\quad\mathrm{T}_7\mathrm{B}_3\mathrm{T}_7^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

ამ გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას :

$$\frac{dy_1}{dz}=\left(\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-2}+\frac{\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}}{z-0}+\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-1}\right)y_1$$

მიღებული განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $B_1'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $B_2'=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $B_3'=$

$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$\det(B_3'-\lambda E)=\det\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-\lambda & 0\\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda\end{pmatrix}\right)=\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$ ე.ი. $\lambda_1=$

$=-\frac{1}{2}$ და $\lambda_2=\frac{1}{2}$ ე.ი.

$[\mathrm{Re}(\lambda_1)]=-1\notin[0;1)$ და $[\mathrm{Re}(\lambda_2)]=0\in[0;1)$ ამის გამო ვაგრძელებთ მსჯელობას ისევ მიღებული განტოლებათა სისტემის მესამე მატრიცისათვის .

განვსაზღვროთ შემდეგი გარდაქმნის მატრიცა :

$D=\mathrm{diag}(1;0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $a_3=1 \;\Rightarrow\; (z-a_3)^D=(z-1)^{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}(z-1)^1 & 0\\ 0 & (z-1)^0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}z-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

მერვე გარდაქმნის მატრიცა არის შემდეგი მატრიცა :

$$T_8(z)=(z-a_3)^D=(z-1)^{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}(z-1)^1 & 0\\ 0 & (z-1)^0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ე.ი.}$$

$$T_8(z)=\begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad T_8^{-1}(z)=\frac{1}{z-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა არაა მუდმივი მატრიცა, ამის გამო :

$$\underbrace{B_1';\ B_2';\ B_3'}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \qquad \underbrace{y_2=T_8(z)y_1=\begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}y_1}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{T_8(z)B_1'T_8^{-1}(z);\quad T_8(z)B_2'T_8^{-1}(z);\quad T_8(z)B_3'T_8^{-1}(z) \quad \text{და} \quad \frac{dT_8(z)}{dz}T_8^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}}$$

$$B_1'=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_8(z)B_1'T_8^{-1}(z)=\begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(z-1) & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B_2'=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow T_8(z)B_2'T_8^{-1}(z)=\begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B_3'=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_8(z)B_3'T_8^{-1}(z)=\begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(z-1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dT_8(z)}{dz} = \begin{pmatrix} (z-1)' & 0' \\ 0' & 1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ე.ი.}$$

$$\frac{dT_8(z)}{dz} T_8^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-1}.$$

ამ გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას :

$$\frac{dy_2}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2 =$$

$$= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2 =$$

$$= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2 .$$

$$\frac{dy_2}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2$$

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცაა $B(z)=\dfrac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1)\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-2}+\dfrac{\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}(z-1)\\ 0 & 0\end{pmatrix}}{z-0}+\dfrac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-1}=$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & \frac{z-1}{2(z-2)}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{z-1}{2z}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & \frac{z-2+1}{2(z-2)}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{z-1}{2z}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}.$$

ეს წრფივ განტოლებათა სისტემა არის ფუქსის $\{2;\ 0;1\}$ წერტილებში, და ექვივალენტურია შემდეგი წრფივ განტოლებათა სისტემის :

$$B_1'=\underset{a_1}{\operatorname{res}}B(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:\,|z-a_1|=r\}}B(z)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:\,|z-2|=r\}}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:\,|z-2|=r\}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:\,|z-2|=r\}}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\\ 0 & 0\end{pmatrix}dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:\,|z-2|=r\}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}dz=$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} \frac{1}{2(z-2)}dz & \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)}\right)dz \\ \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} 0dz & \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} \frac{1}{2(z-2)}dz \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} 0dz & \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\right)dz \\ \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} 0dz & \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} 0dz \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} \frac{1}{2(z-1)}dz & \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} 0dz \\ \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} 0dz & \oint\limits_{\{z:|z-2|=r\}} \frac{1}{2(z-1)}dz \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}2\pi i & \frac{1}{2}2\pi i \\ 0 & \frac{1}{2}2\pi i \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B_2' = \operatorname*{res}_{a_2} B(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-a_2|=r\}} B(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix}dz =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}\frac{1}{2(z-2)}dz & \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)}\right)dz\\ \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}0dz & \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}\frac{1}{2(z-2)}dz\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}0dz & \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\right)dz\\ \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}0dz & \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}0dz\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}\frac{1}{2(z-1)}dz & \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}0dz\\ \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}0dz & \oint\limits_{\{z:|z-0|=r\}}\frac{1}{2(z-1)}dz\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}2\pi i\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$B_3'=\operatorname*{res}_{a_3}B(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-a_3|=r\}}B(z)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)}\\ 0 & \frac{1}{2(z-2)}\end{pmatrix}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\\ 0 & 0\end{pmatrix}dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2(z-1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{2(z-1)}\end{pmatrix}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\frac{1}{2(z-2)}dz & \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(z-2)}\right)dz\\ \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}0dz & \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\frac{1}{2(z-2)}dz\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}0dz & \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2z}\right)dz\\ \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}0dz & \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}0dz\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\frac{1}{2(z-1)}dz & \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}0dz\\ \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}0dz & \oint\limits_{\{z:|z-1|=r\}}\frac{1}{2(z-1)}dz\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}2\pi i&0\\0&\frac{1}{2}2\pi i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

წრფივ განტოლებათა სისტემა :

$$\frac{dy}{dz}=\left(\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-2}+\frac{\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}}{z-0}+\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{z-1}\right)y$$

მიღებული განტოლებათა სისტემის მატრიცებია $B_1'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $B_2'=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}$; $B_3'=$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$\det(B_3' - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ე.ი. } \lambda_1 =$$

$$= \lambda_2 = \frac{1}{2} \text{ ე.ი.}$$

$[\mathrm{Re}(\lambda_1)] = [\mathrm{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0;1)$ ამოიწურა სისტემის მატრიცები, ამის გამო მსჯელობა დასრულებულია .

გარდაქმნის მატრიცა საბოლოოდ :

$$T(z) = T_8(z)T_7(z)T_6(z)T_5(z)T_4(z)T_3(z)T_2(z)T_1(z) = T_8(z)T_7T_6(z)T_5(z)T_4T_3(z)T_2(z)T_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(z-2)^2(z-1)(2z-3)}{4z^2} & \frac{(z-2)^2(z-1)}{z^2} \\ \frac{(z-2)^2}{2z} & 0 \end{pmatrix}.$$

გარდაქმნის მატრიცის ფაქტორიზაცია :

$$\begin{pmatrix} \frac{(z-2)^2(z-1)(2z-3)}{4z^2} & \frac{(z-2)^2(z-1)}{z^2} \\ \frac{(z-2)^2}{2z} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^1 & 0 \\ 0 & z^1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(z-2)^2(-5z+3)}{4z^3} & \frac{(z-2)^2(z-1)}{z^3} \\ \frac{(z-2)^2}{2z^2} & 0 \end{pmatrix}$$

გახლეჩვის ტიპია $(1,1)$.

გამოყენებული ლიტერატურა :

1. ТИПЫ РАСЩЕПЛЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ, ПОСТРОЕННЫХ ПО МОНОДРОМИИ ЗАДАННОЙ ФУКСОВОЙ СИСТЕМЫ, А. А Рябов,2004**.**
2. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные рас-слоени Болибрух А. А.