ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

შვარც–კრისტოფელის ასახვის პარამეტრების პრობლემის შესახებ

მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი კაკულაშვილი

(სამაგისტრო პროექტი)

ხელმძღვანელი:

ფიზიკა – მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი
ასოცირებული პროფესორი
გია გიორგაძე

თბილისი 2018

შინაარსი

ანოტაცია

შვარც–კრისტოფელის ასახვით რთული კონტურით შემოსაზღვრული არე კომპლექსურ სიბრტყეზე შესაძლებელია კონფორმულად აისახოს მრავალკუთხედით შემოსაზღვრულ არეში. ასახვის კონსტრუქციულ აგებას ხელს უშლის შვარც–კრისტოფელის ასახვაში ე.წ. აქსესორული პარამეტრების არსებობა, რომელთა განსაზღვრა ზოგად შემთხვევაში გარკვეულ პრობლემებთანაა დაკავშირებული და ცნობილი არ არის.

ნასრომში შემოთავაზებულია ამ პრობლემის გადაჭრის ერთ–ერთი შესაძლო გზა. გადაწვეტილი ამოცანა შესაძლებელია გამოყენებული იქნას ინტეგრალური სქემების გეომეტრიის დამოკიდებულების შესასწავლად ელექტრონული სქემის სხვადას ელექტრონულ მახასიათებლებზე და ელიფსური განტოლებების სასაზღვრო ამოცანების ანალიზისათვის.

Resume

By Schwarz–Christoffel mapping, we can conformally map area, with complex contour to a area, with bounded polygonal contour. The mapping constuction contains parameters, which in general are very complicated for calculations and remain undefined. This problem is also known as Schwarz–Christoffel Parametric Problem.

In the Article will be offered one possible solution for the problem and its multifaceted applications can be used for different electronic characteristics of electronic circuits. The method of solving the boundary tasks of the elliptical equation will also can be considered.

შესავალი

ელექტრონიკაში ხშირად ფიზიკურად მნიშვნელობანია ელექტრული დაძაბულობასა და წრედის ფორმა. რეზისტორების ერთ-ერთი პრობლემა ეხება მოცემული წინაღობის დადეგენა მრავალკუთხედის შერჩევით.

ეს დამოკიდებულია ლაპლასის სასაზღვრო ამოცანაზე და შედეგად ის არის ინვარიანტული კონფორმული ასახვის მიმართ. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ კონფორმული ანახვა ახალ არეზე, სადაც პრობლემა ტრივიალურია.

კონფორმული ასახვის მეთოდები რეზისტორების ანალიზისთვის მრავალკუთხედებზე დამოკიდებულია შვარც–კრისტოფელის პარამეტრების პრობლემის რიცხვით ამონახსნზე.

სტატიაში ჩვენ შევისწავლით შვარც–კრისტოფელი ფორმულას

$$f^{-1}(z) = w_c + C \int\limits_0^z \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{-\beta_k} d\zeta$$

და ვიპოვით მის მუდვივებს, მოცუმული პარამატრებისთვის.

პარამეტრების პრობლემის ამოხსნისთვის, მნიშვნელოვანია მრავალკუთხედის წიბოების სიგრძის პოვნა, ანუ გამოვთვალოთ შემდეგი ფუნქცია

$$\left| \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{-\beta_k} d\zeta \right|$$

იდეა, რომელსაც ეყრდნობა მოცემული ასახვა და მისი კოეფიციენტები არის ის, რომ f ფუნქციის კონფორმულ გარდაქმნას აქვს წარმოებულები, რომელიც შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$f' = \prod f_k \qquad (*)$$

თითქმის ყველა კონფორმული ასახვა, რომელთა ანალიზური სახე ცნობილია წარმოადგენენ შვარც–კრისტოფელის ასახვას.

ანალიზი

თეორემა 4.1 (შვარც-კრისტოფელი). *ვთქვათ P არის Γ მრავალკუთხედის შიგთავსი, რომლის წვეროებია $w_1, \dots, w_n$ და გარე კუთხეები $\beta_1\pi, \dots, \beta_n\pi$ საათის ისრის მიმართულებით. ვთქვათ f იყოს კონფორმული ასახვა P-დან $\mathbb{R}^2$-ზედა ნახევარ სიბრტყეზე, ისეთი, რომ*

$$f(w_n) = \infty$$

მაშინ f^{-1} ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$f^{-1}(z) = w_c + C\int_0^z \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{-\beta_k} d\zeta$$

სადაც w_c და C არიან კომპლექსური მუდმივები და $z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < z_n = \infty$, ისეთი წერტილებია, რომ $f^{-1}(z_k) = w_k$, $k = 1, \dots, n-1$.

თეორემაში მოყვანილი ასახვის შესასწავლად, საჭიროა განვიხილოთ ინტეგრალური ნაწილის სტრუქტურა. ამისთვის ჩვენ მას წარმოვადგენთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით. ამისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ ტეილორის გაშლას, რომლის თანახმადაც

წინადადება 4.1. თუ $z \in \mathbb{C} \setminus \{z = 0 \vee |z| = 1\}$ და $\alpha \in \mathbb{Q}$, მაშინ

$$(1+z)^\alpha = e^{2\pi i c\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} z^k, \quad \text{როცა} \quad |z| < 1$$

და

$$(1+z)^\alpha = e^{2\pi i c\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} z^{\alpha-k}, \quad \text{როცა} \quad |z| > 1$$

სადაც $c \in \mathbb{Z}$.

აქ ხარისხოვანი მწკრივი გვაძლევს $(1+z)^\alpha$ გამოსახულების მხოლოდ ერთ-ერთ მნიშვნელობას, მაშინ, როცა $e^{2\pi i c\alpha}$, $c \in \mathbb{Z}$, არის მობრუნება ერთეულოვან წრეწირზე და გვაძლევს ყველა განშტოების წერტილებს. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ α-ს რაციონალურობიდან გამომდინარეობს, რომ განშტოების წერტილების რაოდენობა სასრულია.

აქ გამოყენებულ კოეფიციენტებს ეწოდება ბინომიალური და ჩვენ მას შემდეგი ფორმით გამოვიყენებთ

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \text{და} \quad \binom{\alpha}{k} = \prod_{j=1}^{k}\frac{\alpha - j + 1}{j}$$

ამ ფორმით ჩვენთვის არ წარმოადგენს სირთულეს, რომ ბინომიალური კოეფიციენტი განვსაზღვროთ $(\alpha, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_+$ სიმრავლეზე.

ქვემოთ ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგი სახის აღნიშვნებს

$$\sum_{k_1+k_2=3} a_{k_1}b_{k_2} = a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3$$

$$\sum_{k_1+2k_2+3k_3=4} a_{k_1}b_{k_2}c_{k_3} = a_4b_0c_0 + a_2b_1c_0 + a_0b_2c_0 + a_1b_0c_1$$

ალგებრაში მიღებულია ასეთი სახის ჩანაწერები, რადგან ასეთი ფორმით გაცილებით მარტივია ჩაიწეროს მწკრივი, რომლის ინდექსთა სიმრავლეს აქვს რთული სტრუქტურა.

წინადადება 4.2. თუ გვაქვს ორი მწკრივი

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

და

$$g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^{-j}$$

მაშინ

$$f(x)g(x)=\sum_{r=-n}^{n}\left(\sum_{i-j=r} a_i b_j\right) x^r$$

სადაც „$i-j=r$“ გამოსახულება ნიშნავს, რომ i და j არიან ისეთი არაუარყოფითი მთელი რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამ სხვაობას.

მაგალითი 4.1. თუ $n=2$

$$\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2} b_j x^{-j}\right)=\sum_{r=-2}^{2}\left(\sum_{i-j=r} a_i b_j\right) x^r=$$

$$\frac{a_0 b_2}{x^2}+\frac{a_0 b_1+a_1 b_2}{x}+(a_0 b_0+a_1 b_1+a_2 b_2)+(a_1 b_0+a_2 b_1)x+a_2 b_0 x^2$$

თუ კოეფიციენტებს განვალებგებთ, როგორც მატრიცას, მივიღებთ

$$\begin{matrix} a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 \\ a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 \\ a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 \end{matrix}$$

$(n+1)\times(n+1)$ კვადრატულ მატრიცას და $\forall |r| \le n$

$$\sum_{i-j=r} a_i b_j=\sum_{i=r}^{n} a_i b_{i-r}$$

განსაზღვრება 4.1. $z_1,\ldots,z_N \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ და $\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \mathbb{Q}$ წერტილებისთვის განვსაზღვროთ λ_n და μ_n შემდეგნაირად

$$\lambda_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N)=\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}\frac{1}{z_j^{k_j}}\right)$$

$$\mu_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N)=\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}\frac{1}{z_j^{\alpha_j-k_j}}\right)$$

წინადადება 4.3. თუ გვაქვს $\{(z_j,\alpha_j)\}_{j=1}^N$ მიმდევრობა, ისეთი რომ $0<|z_j\zeta|<1$, მაშინ ნამრავლი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ხარისხოვან მწკვირვად

$$\prod_{j=1}^{N}(1+\zeta z_j)^{\alpha_j}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^n$$

თუ $|z_j\zeta|>1$, მაშინ

$$\prod_{j=1}^{N}(1+\zeta z_j)^{\alpha_j}=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N-n}$$

დამტკიცება. თუ $0<|z_j\zeta|<1$, მაშინ ნამრავლის ყოველი წევრი შეგვიძლია გავშალოთ და გადამრავლების შემდეგ დავაჯგუფოთ

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N}(1+\zeta z_j)^{\alpha_j}&=\prod_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k}(\zeta z_j)^k\\&=\sum_{k_1,\ldots,k_N}\binom{\alpha_1}{k_1}\cdots\binom{\alpha_N}{k_N}z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}\zeta^{k_1+\cdots+k_N}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\binom{\alpha_1}{k_1}\cdots\binom{\alpha_N}{k_N}z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}\right)\zeta^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}z_j^{k_j}\right)\right)\zeta^n\end{aligned}$$

თუ $|z_j\zeta|>1$, მაშინ

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N}(1+\zeta z_j)^{\alpha_j}&=\left(\prod_{j=1}^{N}(\zeta z_j)^{\alpha_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{1}{\zeta z_j}\right)^{\alpha_j}\right)\\&=\left(\prod_{j=1}^{N}(\zeta z_j)^{\alpha_j}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}\frac{1}{z_j^{k_j}}\right)\right)\zeta^{-n}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}z_j^{\alpha_j-k_j}\right)\right)\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N-n}\end{aligned}$$

□

შენიშვნა 4.1. ჩვენ შეგვიძლია გადავწეროთ წინადადება 4.3-ში მოყვანილი ფორმულები შემდეგნაირად

$$\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\zeta}{z_j}\right)^{\alpha_j}=e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^n,\ \text{როცა}\ \left|\frac{\zeta}{z_j}\right|<1$$

და

$$\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\zeta}{z_j}\right)^{\alpha_j}=e^{i\theta}\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^{-n},\ \text{როცა}\ \left|\frac{\zeta}{z_j}\right|>1$$

სადაც $0\le\theta<2\pi$ არის მუდმივი. თუ $\forall\alpha_j\in\mathbb{N}$ მაშინ ორივე ფორმლა ხდება სასრული და შეზღუდვა ეხსნება.

მაგალითი 4.2. თუ $\alpha_1 = 2$ და $\alpha_2 = 3$, მაშინ

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{\zeta}{z_1}\right)^2\left(1+\frac{\zeta}{z_2}\right)^3 &= \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\left(2,3;z_1,z_2\right)\zeta^n \\
&= 1+\left(\frac{2}{z_1}+\frac{3}{z_2}\right)\zeta \\
&+\left(\frac{1}{z_1^2}+\frac{6}{z_1z_2}+\frac{3}{z_2^2}\right)\zeta^2 \\
&+\left(\frac{3}{z_1^2z_2}+\frac{6}{z_1z_2^2}+\frac{1}{z_2^3}\right)\zeta^3 \\
&+\left(\frac{3}{z_1^2z_2^2}+\frac{2}{z_1z_2^3}\right)\zeta^4+\frac{1}{z_1^2z_2^3}\zeta^5
\end{aligned}$$

მაგალითი 4.3. თუ $\alpha_1 = 7/3$, $\alpha_2 = 4/5$ და $\alpha_3 = 23/11$, მაშინ

$$f(\zeta) = \left(1+\frac{\zeta}{3}\right)^{7/3}\left(1+\frac{\zeta}{17}\right)^{4/5}\left(1+\frac{\zeta}{20}\right)^{23/11}$$

და მისი შესაბამისი აპროქსიმაცია არის

$$g_m(\zeta) = \sum_{n=0}^{m}\lambda_n\left(\frac{7}{3},\frac{4}{5},\frac{23}{11};3,17,20\right)\zeta^n$$

- ავიღოთ $\zeta = 2$, მაშინ

$$\begin{aligned}
f(2) &\approx 4.3937887019653064355 \\
g_3(2) &\approx 4.3601532914351379790 \\
g_9(2) &\approx 4.3937916952836921818 \\
g_{15}(2) &\approx 4.3937887521913902182 \\
g_{40}(2) &\approx 4.3937887019652293740
\end{aligned}$$

- ავიღოთ $\zeta = -1/3$, მაშინ

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{3}\right) &\approx 0.72194137495099145285 \\
g_3\left(-\frac{1}{3}\right) &\approx 0.72191690326935756506 \\
g_9\left(-\frac{1}{3}\right) &\approx 0.72194137495107092032 \\
g_{15}\left(-\frac{1}{3}\right) &\approx 0.72194137495099145288 \\
g_{40}\left(-\frac{1}{3}\right) &\approx 0.72194137495099145285
\end{aligned}$$

შენიშვნა 4.2. უნდა შევნიშნოთ, რომ როცა ამ გაშლას ვაკეთებთ, თითოელი კოეფიციენ-ტი გამოითვლება სასრული რაოდენობა ოპერაცია კეთდება, თუმცა ყოველი მომდევნო კოეფიციენტის გამოთვლისთვის იზრდება შესაკრები წევრების რაოდენობა. მაგალთად ზემოთ მოყვანილი ფუნქციის გაშლა შემდეგი სახის არის

$$g_\infty(\zeta) = 1+\frac{31283}{33660}\zeta+\frac{168956923}{566497800}\zeta^2+\frac{2205226172729}{57204947844000}\zeta^3+\frac{7703072234129807}{3851037088858080000}\zeta^4+\cdots$$

წინადადება 4.4. თუ გვაქვს $\{(z_j,\alpha_j)\}_{j=1}^N$ მიმდევრობა, ისეთი რომ $z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < z_N$ და $\forall \alpha_j \in \mathbb{Q}$, მაშინ

$$\left|\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\zeta}{z_j}\right)^{\alpha_j}\right|$$

შეგვიძლია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად

- If $\forall z_j : 0 < |\zeta/z_j| < 1$

$$S_k^{(0)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)=\sum_{n=0}^{k}\lambda_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^n$$

- If $\forall z_j : |\zeta/z_j| > 1$

$$S_k^{(\infty)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)=\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}\sum_{n=0}^{k}\mu_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^n$$

- If $z_j < \zeta < z_{j+1}$

$$S_k^{(j)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)=$$
$$S_k^{(\infty)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_j;z_1,\ldots,z_j\right)S_k^{(0)}\left(\zeta;\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_N;z_{j+1},\ldots,z_N\right)$$

სადაც

$$\lim_{k\to\infty}\left|S_k^{(\cdot)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\right|=\left|\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\zeta}{z_j}\right)^{\alpha_j}\right|$$

დამტკიცება. გამომდინარეობს წინადადება 4.3-დან. □

მაგალითი 4.4. ავიღონთ შემდეგი სახის ფუნქცია

$$f(\zeta)=\left(1-\frac{\zeta}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1-\frac{\zeta}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

განვიხილოთ ζ წერტილები

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 1.0584404636420628932\\
S_{12}^{(0)}\left(-\frac{1}{10};-\frac{2}{3},-\frac{2}{3};2,3\right) &\approx 1.0584404636420628845\\
f\left(\frac{23}{10}\right) &\approx -4.6729518716979853260-8.0937900631049921578i\\
S_{78}^{(1)}\left(-\frac{23}{10};-\frac{2}{3},-\frac{2}{3};2,3\right) &\approx -4.6729271283553328807-8.0937472063783690364i
\end{aligned}$$

თეორემა 4.2. *თუ გავდანომრავთ $z_1, z_2, \ldots, z_N$ ისე რომ*

$$|z_1| < |z_2| < \cdots < |z_N|$$

მაშინ

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}}\prod_{j=1}^{N}\left(1-\frac{\zeta}{z_j}\right)^{-\beta_j}d\zeta\approx e^{i\theta}\int_{z_j}^{z_{j+1}}S_k^{(j)}\left(-\zeta;-\beta_1,\ldots,-\beta_N;z_1,\ldots,z_N\right)d\zeta$$

სადაც θ არის რაიმე მუდმივა და $k\to\infty$.

დამტკიცება. გამომდინარეობს წინადადება 4.4-დან. □

თეორემა 4.2-დან გამომდინარეობს, რომ ჩვენ შეგვიძლია პარამეტრების პრობლემის პრობლემა დავიყვანოთ ორ უცნობიანი წრფივი სისტემის ამოხსნაზე.

თეორემა 4.3. *ვთქვათ P არის Γ მრავალკუთხედის შიგთავსი, რომლის წვეროებია*

$$w_1, \ldots, w_n$$

და გარე კუთხეები

$$\beta_1\pi, \ldots, \beta_n\pi$$

საათის ისრის მიმართულებით. მაშინ შვარც-კრისტოფელის f^{-1} ასახვის

$$f^{-1}(z) = w_c + C\int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{-\beta_k} d\zeta$$

პარამერები შეგვიძლია ვიპოვოთ წრფივი სისტემიზე დაყრდნობით, კერძოდ

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{f^{-1}(z_{j+1}) - f^{-1}(z_j)} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_j}\right)^{-\beta_j} d\zeta$$

$$w_c = f^{-1}(z_1) - C\int_0^{z_1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{-\beta_k} d\zeta$$

ფორმალურ ხარისხოვან მწკრივის შექცეული

ავიღოთ ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივი

$$f(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1} + \cdots$$

და ავაგოთ ისეთი g, რომ იყოს f-ის შექცეული

$$g(x) = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots + b_nx^{n+1} + \cdots$$

ანუ მათი კომპოზიცია იყო $f(g(x)) = x$. ჩვენ თუ უკანასკნელს გამოვიყენებთ, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}
b_1 &= -a_1 \\
b_2 &= 2a_1^2 - a_2 \\
b_3 &= -5a_1^3 + 5a_1a_2 - a_3 \\
b_4 &= 14a_1^4 - 21a_1^2a_2 + 6a_1a_3 + 3a_2^2 - a_4
\end{aligned}$$

და უფრო ზოგადად

$$b_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} (-1)^{k_1+\cdots+k_n} \lambda(k_1, \ldots, k_n) \prod_{i=1}^{n} a_i^{k_i} \tag{5.1}$$

პრაქტიკული შემოწმებებით λ კოეფიციენტები გამოისახება შემდეგნაირად

$$\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \binom{2k_1 + 3k_2 + \cdots + (n+1)k_n}{1 + k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n, k_1, k_2, \ldots, k_n} \tag{5.2}$$

თეორემა 5.1. *თუ მოცემულია f და g ხარისხოვანი მწკრივები და მათი კომპოზიცია იგივეობაა, მაშინ*

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\mu(k, n)$$

სადაც $b_0 = 1$ და

$$\mu(k, n) = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+km_k=k} \frac{(n-k+1)!}{((n-k+1) - (m_1 + \cdots + m_k))!} \prod_{i=1}^{k} \frac{a_i^{m_i}}{m_i!}$$

დამტკიცება. თუ გავშლით კომპოზიციას მივიღებთ იგივე ტიპის მრავალწევრს, როგორიც f-ია

$$g(f(x)) = x + \alpha_1x^2 + \alpha_2x^3 + \cdots + \alpha_sx^{s+1} + \cdots$$

ამ კოეფიციენტების საპოვნელად ჩვენ ვაკეთებთ შემდეგს

$$\begin{aligned}
f_s^{n_0}(x) &= \left(x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_sx^{s+1}\right)^{n_0} \\
&= \sum_{n_i \geq n_{i+1} \geq 0} \frac{n_0!}{(n_0 - n_1)!} \left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{a_i^{n_i - n_{i+1}}}{(n_i - n_{i+1})!}\right) \frac{a_s^{n_s}}{n_s!} x^{n_0+\cdots+n_s}
\end{aligned}$$

რადგან α_s გამოისახება $a_1, \ldots, a_s$ კოეფიციენტებით

$$g(f_s(x)) = \sum_{n_0=0} b_{n_0} f_s^{n_0+1}(x) = \sum_{n_i \geq n_{i+1} \geq 0} \frac{b_{n_0}(n_0+1)!}{(n_0 - n_1 + 1)!} \left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{a_i^{n_i - n_{i+1}}}{(n_i - n_{i+1})!}\right) \frac{a_s^{n_s}}{n_s!} x^{1+n_0+\cdots+n_s}$$

ხარისხოვან მწკრივში α_s არის x^{s+1}-ს კოეფიციენტი, ამიტომ

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \sum_{\substack{n_0+\cdots+n_s=s\\ n_1\geq\cdots\geq n_s\geq 0}} \frac{b_{n_0}(n_0+1)!}{(n_0-n_1+1)!}\left(\prod_{i=1}^{s-1}\frac{a_i^{n_i-n_{i+1}}}{(n_i-n_{i+1})!}\right)\frac{a_s^{n_s}}{n_s!}\\ &= \sum_{k=0}^{s} b_{s-k} \sum_{\substack{n_1\geq\cdots\geq n_s\geq 0\\ n_1+\cdots+n_s=k}} n_1! C_{1+s-k}^{n_1}\left(\prod_{i=1}^{s-1}\frac{a_i^{n_i-n_{i+1}}}{(n_i-n_{i+1})!}\right)\frac{a_s^{n_s}}{n_s!}\\ &= \sum_{k=0}^{s} b_{s-k}\mu(k,s)\end{aligned}$$

თუ ჩვენ გადავაკეთებთ ინდექსთა სიმრავლეს

$$m_i = \begin{cases} n_i - n_{i+1} & i<k\\ n_k & i=k\end{cases} \Rightarrow n_i = \sum_{j=i}^{k} m_j$$

და $n_1+n_2+\cdots+n_k = m_1+2m_2+\cdots+km_k$, μ გამოისახება ისევე როგორც თეორემაშია. ამ შემთხვევაში $\alpha_k=0$, ამიტომ

$$0 = b_s + \sum_{k=1}^{s} b_{s-k}\mu(k,s)$$

□

თეორემა 5.2. *$\lambda(z_1,\ldots,z_n)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია (5.1) ფორმულაში აკმაყოფილებს რეკურსიას*

$$\lambda(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n-k}\Phi(\alpha;z)\frac{\lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}{(z_1-\alpha_1)!\cdots(z_n-\alpha_n)!} \tag{5.3}$$

სადაც

$$\Phi(\alpha;z) = (-1)^{1+(z_1-\alpha_1)+\cdots+(z_n-\alpha_n)}1+\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n(z_1-\alpha_1)+\cdots+(z_n-\alpha_n) \tag{5.4}$$

და $z_1+2z_2\cdots+nz_n=n$.

დამტკიცება. 5.1 განტოლებისა და 5.1 თეორემის გამოყენებით

$$\begin{aligned}b_s &= -\sum_{k=1}^{s} b_{s-k}\mu(k,s)\\ &= -\sum_{k=1}^{s} b_{s-k}\sum_{m_1+2m_2+\cdots+sm_s=k}\frac{(s-k+1)!}{((s-k+1)-(m_1+\cdots+m_s))!}\prod_{i=1}^{s}\frac{a_i^{m_i}}{m_i!}\\ &= -\sum_{k=1}^{s}\sum_{n_1+2n_2+\cdots+sn_s=s-k}\\ &\qquad\sum_{m_1+2m_2+\cdots+sm_s=k}\frac{(-1)^{n_1+\cdots+n_s}(s-k+1)!\lambda(n_1,\ldots,n_s)}{((s-k+1)-(m_1+\cdots+m_s))!}\prod_{i=1}^{s}\frac{a_i^{n_i+m_i}}{m_i!}\end{aligned}$$

რადგან $z_i=n_i+m_i$ არიან არა უარყოფითი მთელი რიცხვები, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}n_1+2n_2+\cdots+sn_s &= s-k\\ m_1+2m_2+\cdots+sm_s &= k\\ z_1+2z_2+\cdots+sz_s &= s\end{aligned}$$

ამიტომ

$$\sum_{z_1+2z_2+\cdots+sz_s=s}(-1)^{z_1+\cdots+z_s}\lambda(z_1,\ldots,z_s)\prod_{i=1}^{s}a_i^{z_i}=$$

$$\sum_{z_1+2z_2+\cdots+sz_s=s}(-1)^{z_1+\cdots+z_s}\eta(s,z,m)\prod_{i=1}^{s}a_i^{z_i}$$

სადაც

$$\eta(s,z,m)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{m_1+2m_2+\cdots+sm_s=k}\frac{(-1)^{1+m_1+\cdots+m_s}(s-k+1)!\lambda(z_1-m_1,\ldots,z_s-m_s)}{((s-k+1)-(m_1+\cdots+m_s))!}\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{m_i!}$$

რადგან ეს გამოსახულება სამართლიანია ნებისმიერი a_i რიცხვებისთვის

$$\lambda(z_1,\ldots,z_s)=\eta(s,z,m),\ \text{სადაც}\ z_1+2z_2+\cdots+sz_s=s.$$

თუ ჩვენ დავწერთ $m_i=z_i-n_i$, მაშინ

$$k=m_1+2m_2+\cdots+sm_s=s-(n_1+2n_2+\cdots+sn_s)\Rightarrow n_1+2n_2+\cdots+sn_s=s-k.$$

ამიტომ, ჩვენ ვიღებთ

$$\lambda(z_1,\ldots,z_s)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{n_1+2n_2+\cdots+sn_s=s-k}\Phi(n;z)\frac{\lambda(n_1,\ldots,n_s)}{(z_1-n_1)!\cdots(z_s-n_s)!}$$

სადაც

$$\Phi(\alpha;z)=(-1)^{1+(z_1-n_1)+\cdots+(z_s-n_s)}1+n_1+2n_2+\cdots+sn_s(z_1-n_1)+\cdots+(z_s-n_s)$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივის შებრუნებული

წინადადება 6.1. თუ გვაქვს ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივი

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

მაშინ

$$\frac{1}{f(x)} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

სადაც

$$b_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_n} (k_1+k_2+\cdots+k_n)! \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j^{k_j}}{k_j!}$$

დამტკიცება. სანამ უშვალოდ დამტკიცებაზე გადავალთ უნდა ავღნიშნოთ, რომ

$$\frac{1}{f(x)} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

მარჯვენა მხარე არის ისეთი, რომ

$$\left(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)\left(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\right) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

სადაც ყველა $c_n = 0$. მაგალითად, პირველი ოთხი b_n არის

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_1 \\ b_2 &= a_1^2 - a_2 \\ b_3 &= -a_1^3 + 2a_1 a_2 - a_3 \\ b_4 &= a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + 2a_1 a_3 + a_2^2 - a_4 \end{aligned}$$

მარტივი დასანახია, რომ

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \quad a_0 = b_0 = 1$$

და რადგან $c_n = 0$, ჩვენ ვიღებთ რეკურსიას

$$b_n = -\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$$

ამ რეკურსიის ამოსახსნელად ჩვენ ჩავთვლით, რომ ამონახს აქვს შემდეგი სახე

$$b_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_n} \phi(k_1, k_2, \ldots, k_n) \prod_{j=1}^{n} a_j^{k_j}$$

სადაც ϕ არ არის დამოკიდებული n-ზე და აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს

1. $\phi(0) = 1$;
2. $\phi(k_1, \ldots, k_n) = \phi(k_1, \ldots, k_n, 0, 0, \ldots)$;
3. თუ რომელიმე არგუმენტი უარყოფითია ან არ არის მთელი, მაშინ $\phi = 0$.

$$\sum_{z_1+2z_2+\cdots+nz_n=n} (-1)^{z_1+\cdots+z_n} \phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) \prod_{j=1}^{n} a_j^{z_j} = b_n = -\sum_{s=1}^{n} a_s b_{n-s}$$

$$= -\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n-s} (-1)^{k_1+\cdots+k_n} \phi(k_1, \ldots, k_n) \prod_{j=1}^{n} a_j^{k_j} \right) a_s$$

$$= -\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n-s}(-1)^{k_1+\cdots+k_n}\phi\left(k_1,\ldots,k_n\right)\prod_{j=1}^{n}a_j^{k_j}\right)\times$$

$$\left(\sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=s}\chi\left(\forall i\neq s: m_i=0\right)\chi\left(m_s=1\right)\prod_{j=1}^{n}a_j^{m_j}\right)$$

$$= -\sum_{s=1}^{n}\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n-s}\sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=s}$$

$$(-1)^{k_1+\cdots+k_n}\phi\left(k_1,\ldots,k_n\right)\chi\left(\forall i\neq s: m_i=0\right)\chi\left(m_s=1\right)\prod_{j=1}^{n}a_j^{k_j+m_j}$$

$$= \sum_{z_1+2z_2+\cdots+nz_n=n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n-s}$$

$$(-1)^{1+k_1+\cdots+k_n}\phi\left(k_1,\ldots,k_n\right)\chi\left(\forall i\neq s: k_i=z_i\right)\chi\left(z_s-k_s=1\right)\prod_{j=1}^{n}a_j^{z_j}$$

აქ ჩვენ გავაკეთეთ რამოდენიმე მნიშვნელოვანი გარდაქმნა. პირველი არის შემდეგი იგივეობა

$$a_s = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=s}\chi\left(\forall i\neq s: m_i=0\right)\chi\left(m_s=1\right)\prod_{j=1}^{n}a_j^{m_j}$$

სადაც $\chi\left(\mathcal{A}\right)$ არის მახალიათებელი ფუნქცია, რომელიც არის 1 თუ $\mathcal{A}$ დებულება სამართლიანია და წინააღმდეგ შემთხვევაში 0.

მეორე მოქმედებით ჩვენ შევცვალეთ იდექსთა სიმრავლე შემდეგნაირად

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n-s}\sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=s}u\left(k_1,\ldots,k_n\right)v\left(m_1,\ldots,m_n\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n-s}\sum_{z_1+2z_2+\cdots+nz_n=n}u\left(k_1,\ldots,k_n\right)v\left(z_1-k_1,\ldots,z_n-k_n\right)$$

$$= \sum_{z_1+2z_2+\cdots+nz_n=n}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n-s}u\left(k_1,\ldots,k_n\right)v\left(z_1-k_1,\ldots,z_n-k_n\right)\right)$$

აქ ჩვენ ვგულისხმობთ რომ ეს ფუნციები აკმაყოფილებენ ϕ-ზე მოთხოვნილ მესამე თვისებას.

a_j კოეფიციენტების ნებისმიერობიდან გამომდინარეობს, რომ როცა

$$z_1+2z_2+\cdots+nz_n=n$$

ადგილი აქვს ტოლობას

$$(-1)^{z_1+\cdots+z_n}\phi\left(z_1,\ldots,z_n\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n-s}(-1)^{1+k_1+\cdots+k_n}\phi\left(k_1,\ldots,k_n\right)\chi\left(\forall i\neq s: k_i=z_i\right)\chi\left(z_s-k_s=1\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n}(-1)^{1+z_1+\cdots+z_{s-1}+(z_s-1)+z_{s+1}+\cdots+z_n}\phi\left(z_1,\ldots,z_{s-1},z_s-1,z_{s+1},\ldots,z_n\right)$$

ამიტომ

$$\phi\left(z_1,\ldots,z_n\right) = \sum_{s=1}^{n}\phi\left(z_1,\ldots,z_{s-1},z_s-1,z_{s+1},\ldots,z_n\right)$$

მაგალითად

$$\phi(2,1,0)=\phi(1,1,0)+\phi(2,0,0)=\phi(1,0,0)+\phi(1,0,0)+\phi(2,0,0)=3$$

და ეს არის $a_1^2a_2$-ის კოეფიციენტი.

ამ რეკურსიის ამონახსნია

$$\phi(z_1,\ldots,z_n)=\frac{(z_1+z_2+\cdots+z_n)!}{z_1!z_2!\cdots z_n!}$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ იგი აკმაყოფილებს პირობებს, მაგალთად

$$\frac{((k_1-1)+k_2)!}{(k_1-1)!k_2!}+\frac{(k_1+(k_2-1))!}{k_1!(k_2-1)!}=(k_1+k_2)\frac{(k_1+k_2-1)!}{k_1!k_2!}=\frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!}$$

□

მაგალითი 6.1. თუ ავიღებთ

$$\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+O\left(x^8\right),\quad a_n=\frac{1}{(n+1)!}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

მაშინ

$$\frac{x}{\sin(x)}=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+O\left(x^8\right)$$

მაგალითი 6.2.

$$(1+z)^\beta(1-z)^\beta=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\beta}{j}(-z)^j\right)=\sum_{k,j=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}\binom{\beta}{j}(-1)^jz^{k+j}=$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k+j=r}(-1)^j\binom{\beta}{k}\binom{\beta}{j}\right)z^r=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\beta}{r-j}\binom{\beta}{j}\right)z^r=$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\binom{\beta}{r}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\beta)_j(-r)_j}{(\beta-r+1)_j}\frac{(-1)^r}{j!}\right)z^r=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r{}_2F_1(-\beta,-r,\beta-r+1;-1)\binom{\beta}{r}z^r$$

მეორეს მხრივ

$$(1+z)^\beta(1-z)^\beta=\left(1-z^2\right)^\beta=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\beta}{r}(-1)^rz^{2r}$$

ამიტომ, თუ $r\geq 0$ არის კენტი

$${}_2F_1(-\beta,-r,\beta-r+1;-1)=0$$

და თუ $r\geq 0$ არის ლუწი

$${}_2F_1(-\beta,-r,\beta-r+1;-1)=(-1)^{r/2}\binom{\beta}{r/2}\binom{\beta}{r}^{-1}$$

მაგალითი 6.3. თუ

$$(1+z)^\beta=1+\binom{\beta}{1}z+\binom{\beta}{2}z^2+\binom{\beta}{3}z^3+\cdots$$

მაშინ

$$\frac{1}{(1+z)^\beta}=1+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots$$

სადაც

$$b_s=\sum_{k_1+2k_2+\cdots+sk_s=s}(-1)^{k_1+\cdots+k_s}\frac{(k_1+\cdots+k_s)!}{k_1!\cdots k_s!}\prod_{j=1}^{s}\binom{\beta}{j}^{k_j}$$

ამიტომ, ვიღებთ

$$\binom{-\beta}{s} = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+sk_s=s} (-1)^{k_1+\cdots+k_s} \frac{(k_1+\cdots+k_s)!}{k_1!\cdots k_s!} \prod_{j=1}^{s} \binom{\beta}{j}^{k_j}$$

მაგალითი 6.4. რადგან

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad |x| < 1$$

ვიღებთ

$$\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_n} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} = 0, \quad n > 1$$

დასკვნა

მოცემულ სტატიაში ჩვენ ყურადღება უფრო გავამახვილეთ შვარც-კრისტოფელის ასახვის აგებულებაზე, ვიდრე მის რიცხვით გამოთვლაზე და ვაჩვენეთ მისი გაშლა. ეს მეთოდი საშვალებას იძლევა მასზე მოვახდინოთ ისეთი ოპერაციები, რასაც ჩვეულებრივი რიცხვითი გამოთვლებით ვერ გავაკეთებდით, მაგალითად მისი შექცეული ფუნქციის აგება.

როგორც გამოჩდა გაშლაში, ხარისხოვანი მწრკრივის კოეფიციენტების გამოსათვლელად საჭიროა არაუარყოფითი მთელი რიცხვების დანაწილებების პოვნა, რაც საკმაოდ მძიმე ოპერაცია არის, თუმცა აღსანიშნავია, რომ მსგავსი სტრუქტურა ხშირად გვხვდება, როდესაც ვცდილად პრობლემა მსგავსი მეთოდებით გადავჭრათ. მაგალითად ასეთი სრტუქტურა აკავშირებს ერთმანეთთან შტასეფის პოტიტოპებსა და ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივის შექცეულის კოეფიციენტებს ერთმანეთთან და საინტერესო თვისებებს ავლენენ.

ძირითადი შედეგები ასახულია სტატიაში: G.Kakulashvili, On the parameter problem of Schwarz-Chrispoffel mapping. Proc.I.Vekua Institute of Applied Mathematics, vol.67, pp.24-37, 2017

ლიტერატურა

[1] Lloyd N. Trefethen. Analysis and design of polygonal resistors by conformal mapping.

[2] Tobin A. Driscoll and Lloyd N. Trefethen. Schwarz-Christoffel mapping.

[3] Philip P. Bergonio. Schwarz-Christoffel Transformations.