ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სამაგისტრო ნაშრომი

ავტორი: ქეთევან გომიაშვილი

დეკომპოზიციის სქემები აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის

სამაგისტრო პროგრამა: მათემატიკა

ნაშრომი წარმოდგენილია მეცნიერებათა მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი:

ჯემალ როგავა, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი

თბილისი, 2018

IVANE JAVAKHISHVILI TBILISI STATE UNIVERSITY

MASTER'S THESIS

Autor: Ketevan Gomiashvili

DECOMPOSITION SCHEMES FOR ABSTRACT HYPERBOLIC EQUATION

Master's Degree Program: Mathematics

A thesis presented for the academic degree of Master of Science

Supervisor:

Jemal Rogava, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Associate Proffesor

Tbilisi, 2018

სარჩევი

გვერდი

ანოტაცია 3

Annotation 4

შესავალი 5

1 პარალელური დეკომპოზიციის სქემა წრფივი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის **7**

1.1 ამოცანის დასმა 7

1.2 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილობის წარმოდგენა ჩებიშევის პოლინომების საშუალებით და ძირითადი თეორემა 9

1.3 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება 20

1.4 მიახლოებითი ამონახსნის შესაბამისი პირველი რიგის წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგის ცდომილების შეფასება 21

1.5 ტესტური მაგალითები 23

2 პარალელური დეკომპოზიციის სქემა კვაზიწრფივი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის **29**

2.1 ამოცანის დასმა 29

2.2 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილობის წარმოდგენა ჩებიშევის პოლინომების საშუალებით და ძირითადი თეორემა 31

2.3 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება 34

2.4 მიახლოებითი ამონახსნის შესაბამისი პირველი რიგის წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგის ცდომილების შეფასება 38

3 მაღალი რიგის დეკომპოზიციის სქემა ერთგვაროვანი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის **45**

3.1 ამოცანის დასმა 45

3.2 რაციონალური გახლეჩვა კოსინუს ოპერატორ ფუნქციისთვის 46

3.3 თეორემა მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასების შესახებ . . 49

დასკვნა 52
ლიტერატურა 53

ანოტაცია

ჰილბერტის სივრცეში განხილულია კოშის ამოცანა აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის. განტოლების ელიფსური ნაწილის შესაბამისი A ოპერატორი წარმოადგენს ჯამს $A_1, A_2, ..., A_m$ ოპერატორებისა. ყოველი შესაკრები არის თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული. აგებულია დასმული ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის სქემა. ამ სქემის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ ყოველ ლოკალურ შუალედში პარალელურად იხსნება (ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად) კლასიკური სხვაობიანი ამოცანები, შესაბამისად $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$ ოპერატორებით. მიღებული ამონახსნებისგან შედგენილი აწონილი საშუალო ცხადდება მიახლოებით ამონახსნად ლოკალური შუალედის მარჯვენა ბოლოში.

დამტკიცებულია შემოთავაზებული სქემის კრებადობა და შეფასებულია, როგორც მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება, ასევე პირველი რიგის წარმოებულის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგის ცდომილობა, იმ შემთხვევისთვის, როცა საწყისი ამოცანის მონაცემები აკმაყოფილებს ბუნებრივ საკმარის პირობებს ამონახსნის არსებობისთვის.

ნაშრომში ასევე განხილულია მაღალი რიგის დეკომპოზიციის სქემა ერთგვაროვანი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის. მაღალი რიგის დეკომპოზიციის სქემები აგებულია კოსინუს ოპერატორ ფუნქციისთვის რაციონალური აპროქსიმაციის საფუძველზე. წინა თავებში დამუშავებული მეთოდიკის გამოყენებით შეფასებულია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილობა.

Annotation

In the present work, we consider the Cauchy problem for abstract hyperbolic equation in the Hilbert space H. Operator A from ellipse part of equation, is sum of $A_1, A_2, ..., A_m$ self-adjoint , positively defined operators. The parallel type of decomposition scheme for the approximate solution of given problem is constructed. The idea of this scheme is that in every local interval according to operators $A_1, A_2, ..., A_m$ the classical discrete analogues are solved independently. The weighted average deducted from the solutions is called as approximate solution at the right end of the local interval.

The convergence of offered scheme is proved. Error of approximate salution and diskrete analogue of first order derivative are estimated, when initial data satisfies some natural conditions for existence of the salution.

In the last part, we consider the high order decomposition scheme for the Cauchy problem for homogeneus abstract hyperbolic equation. The high order schemes of parallel decomposition are constructed based on rational approximation for cosine operator function. We use the methods already considered in first chapters to estimate error of approximate salution.

შესავალი

პირველი ნაშრომები, დეკომპოზიციის სქემების დაფუძნების და გამოკვლევების შესახებ, გამოქვეყნდა XX საუკუნის 50-იან და 60-იან წლებში (იხ. G. A. Baker, T. A. Oliphant [2], G. Birkhoff, R. S. Varga [3], G. Birkhoff, R. S. Varga, D. Young [4], J. Douglas [6], J. Douglas, H. Rachford [7], E. G. Diakonov [5], D. G. Gordeziani [8], N. N. Ianenko [12], [13], V. P. Ilin [14], A. N. Konovalov [17], G. I. Marchuk, N. N. Ianenko [21], G. I. Marchuk, U. M. Sultangazin [22], D. Peaceman, H. Rachford [25], A. A. Samarskii [31],[32]). შეიძლება ითქვას, რომ ამ ავტორების შრომებმა მისცა ბიძგი შემდგომ გამოკვლევებს დეკომპოზიციის სქემების შესახებ.

დეკომპოზიციის სქემები, რიცხვითი გამოთვლების თვალსაზრისით, შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად: მიმდევრობითი (იხ.G. I. Marchuk [20], A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich [33]) და პარალელური ტიპის დეკომპოზიციებად (D. G. Gordeziani [8],[9], D. G. Gordeziani, H. V. Meladze [10], D. G. Gordeziani, A. A. Samarskii [11], A. M. Kuzyk, V. L. Makarov [18]).

რიცხვითი რეალიზაციის თვალსაზრისით, გამოთვლითი კლასტერების არსებობის პირობებში, ცხადია, უპირატესობა შეიძლება მიენიჭოს პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის სქემებს. წარმოდგენილი ნაშრომი სწორედ პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის სქემის აგებას და გამოკვლევას ეხება.

კარგად არის ცნობილი, რომ ევოლუციის ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის სქემების ცდომილების შესაფასებლად, როგორც წესი, ამონახსნისგან ითხოვენ საკმარისად მაღალ სიგლუვეს, ვიდრე საჭიროა ბუნებრივი პირობებიდან გამომდინარე. დეკომპოზიციის სქემების შემთხვევაში ეს ნიუანსი უფრო მეტ მნიშვნელობას იძენს. მოთხოვნა სიგლუვის გაზრდაზე, შეიძლება გამოიწვიოს სქემის კონსტრუქციამ (ნახევარდისკრეტული სქემების შემთხვევაში), აგრეთვე იმ ფაქტმა, რომ გახლეჩის შედეგად მიღებული ამოცანების შესაბამისი ოპერატორები საზოგადოდ არაკომუტაციურია. აქედან გამომდინარე, აქტუალურია საკითხი ისეთი დეკომპოზიციის სქემების აგების, რომელთა რეალიზაცია და მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასების მეთოდიკა არ მოითხოვს ამონახსნის სიგლუვის მკვეთრ ზრდას. მეორე რიგის ევოლუციური განტოლებისთვის ეს ნიუანსები უფრო რთულად წარმოჩნდება, ვიდრე პირველი რიგისთვის. ჩვენი აზრით, ამის მიზეზი არის ის, რომ პირველი რიგის ევოლუციური განტოლებისთვის ბუნებრივი სქმეა არის ორშრიანი, ხოლო მეორე რიგისთვის - სამშრიანი. ცხადია, მეტ წილი შემთხვევებისთვის, ორშრიან სქემასთან შედარებით, სამშრიანი სქემის გამოკვლევა გარკვეულ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. თუმცა აქ, ერთი შეხედვით, არსებობს გამოსავალი. მეორე რიგის ევოლუცური განტოლება დამატებითი უცნობის

შემოტანის გზით დავიყვანოთ პირველი რიგის სისტემაზე. ამ შემთხვევაში, თუ თავიდან მოცემულ განტოლებაში შემავალი ოპერატორი არის თვითშეუღლებული, მიღებულ სისტემაში დაგვიჯდება მატრიცული ოპერატორი, რომელიც უკვე აღარ იქნება თვითშეუღლებული, რაც არსებითად გაართულებს გამოკვლევას.

წარმოდგენილ ნაშრომში მეორე რიგის ევოლუციური განტოლებისთვის შემოთავაზებული დეკომპოზიციის სქემა არ ითხოვს ამონახსნის სიგლუვის გაზრდას, ამასთან მეთოდიკა, რომელსაც ვიყენებთ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შესაფასებლად, გვაძლევს საშუალებას დავადგინოთ კრებადობის რიგი თითქმის ბუნებრივი შეზღუდვების პირობებში. დეკომპოზიციის სქემის გამოკვლევისთვის ჩევნ ვიყენებთ გარკვეული კლასის პოლინომებს. ეს პოლინომები გამოისახებიან ჩებიშევის კლასიკური მეორე გვარის პოლინომების საშუალებით. დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის სქემებში ორთოგონალური პოლინომების გამოყენებას ეძღვნება შრომები: V. L. Makarov [19], A. G. Morris, T. S. Horner [23], V. A. Novikov, G. V. Demidov [24], V. A. Rastrenin [27],[19]. ნაშრომში საკმარისად ფართოდ არის წარმოდგენილი სხვაობიან ამოცანებში ორთოგონალური პოლინომების გამოყენების ბევრი ასპექტი.

თავი 1

პარალელური დეკომპოზიციის სქემა წრფივი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის

1.1 ამოცანის დასმა

განვხილოთ კოშის ამოცანა

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t), t \in [0, T] \tag{1.1}$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad \frac{du(t)}{dt} = \varphi_1 \tag{1.2}$$

სადაც $\overline{D\,(A)} = H$, $\quad A^* = A$ და $(Au, u) \geq \alpha ||u||^2 \qquad \forall u \in D(A)$, $\alpha = const > 0$ $\| \ . \ \|$ და $(.,.)$ არის შესაბამისად ნორმა და სკალარული ნამრავლი განმარტებული H ჰილბერტის სივრცეში სივრცეში. φ_0 და φ_1 მოცემული ვექტორებია H-დან;

$u(t)$ ფუნქცია არის საძიებელი ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, მნიშვნელობებით H-სივრცეში და $f(t)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა.

წრფივ შემთხვევაში $u(t)$ ვექტორ-ფუნქციას, განსაზღვრულს $[0, T]$ ინტერვალზე მნიშვნელობებით H-ში, ვუწოდებთ (1.1),(1.2) ამოცანის ამონახსნს, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $u(t)$ არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი $[0, T]$ ინტერვალში

ბ) $u(t) \in D(A)$ ყოველი t-სთვის $[0, T]$-დან და $Au(t)$ ფუნქცია არის უწყვეტი

გ) $u(t)$ აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას $[0, T]$ ინტერვალზე და (1.2) საწყის პირობებს.

აქ უწყვეტობა და დიფერენცირებადობა განსაზღვრულია H სივრცის მეტრიკით.

შენიშვნა 1.1.1 თუ $f(t)$ უწყვეტად დიფერენცირებადია [0,T] შუალედზე, $\varphi_0 \in D(A)$, $\varphi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, მაშინ (1.1),(1.2) ამოცანის ამონახსნი $u(t)$ აკმაყოფილებს პირობას:

ფუნქცია $u'(t)$ ღებულობს მნიშვნელობებს $D(A^{\frac{1}{2}})$-დან და $D(A^{\frac{1}{2}})u'(t)$ უწყვეტია $[0,T]$-ზე.

ვთქვათ

$$A=\sum_{j=1}^m A_j, \quad A_j=A_j^*\geq \alpha_j I, \, \alpha_j=const>0, \quad f(t)=\sum_{j=1}^m f_j(t)$$

მაშინ (1.1), (1.2) ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს

$t=t_{k+1}=(k+1)\tau$, $k=1,\dots,n-1$, $\tau=T/n$ ($n>1$)

წერტილებში, განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$v_{k+1}=\sum_{j=1}^m \eta_j y_{j,k+1} \ , \quad \sum_{j=1}^m \eta_j=1, \quad 0<\eta_j<1,$$

სადაც $y_{j,k+1}$ არის ამონახსნი შემდეგი სხვაობიანი სქემის:

$$\eta_j\frac{y_{j,k+1}-2v_k+v_{k-1}}{\tau^2}+A_j y_{j,k+1}=f_j(t_k) \tag{1.3}$$

$$v_0=\varphi_0 \ , \quad v_1=\varphi_0+\tau\varphi_1 \ , \tag{1.4}$$

ამრიგად, რომ ავაგოთ t_{k+1} წერტილში (1.1),(1.2) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი v_{k+1} საჭიროა ამოვხსნათ პარალელურად m ცალი ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი ამოცანა. გამომდინარე აქედან, (1.3) სქემას შეგვიძლია ვუწოდოთ პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის სქემა. ასეთი ტიპის სქემები პირველად განხილული იყო დ. გორდეზიანის შრომებში (იხ.[8], [9]). პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის სქემები განხილულია ასევე შრომებში: დ.გორდეზიანის, ა.სამარსკი [11], დ.გ,გორდეზიანი, ჰ.ვ. მელაძე [10], ვ.ლ. მაკაროვი [18]. უშუალოდ (1.3) სქემა განხილულია [28]-ში.

შენიშნვა 1.1.2 (1.1),(1.2) ამოცანის ქვეშ ექცევა სივრცით ერთი, ორი და მრავალგანზომილებიანი რხევის კლასიკური განტოლებები ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით. ცხადია ასევე, რომ (1.1),(1.2) ამოცანის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს კოშის ამოცანა მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისთვის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული მატრიცით.

1.2 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილობის წარმოდგენა ჩებიშევის პოლინომების საშუალებით და ძირითადი თეორემა

ამ პარაგრაფში ნაჩვენები იქნება წარმოდგენილი სქემის კრებადობა ჩებიშევის პოლინომების დახმარებით.

ვთქვათ (1.1),(1.2) ამოცანას აქვს ამონახსნი, მაშინ (1.3) განტოლება $t = t_{k+1}$ წერტილში შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე

$$\frac{u(t_{k+1}) - 2u(t_k) + u(t_{k-1})}{\tau^2} + Au(t_{k+1}) = g_k \ , \tag{1.5}$$

სადაც

$$\begin{aligned} g_k \ &= \ f(t_k) + A\left[u(t_{k+1}) - u(t_k)\right] + \tau^{-2} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)\left[u''(t) - u''(t_k)\right] dt + \\ &+ \tau^{-2} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1})\left[u''(t) - u''(t_k)\right] dt \ \ . \end{aligned}$$

(1.5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$u(t_{k+1}) - 2Lu(t_k) + Lu(t_{k-1}) = \tau^2 L g_k \ , \tag{1.6}$$

სადაც $k = 1, \ldots, n-1$, და

$$L = \left(I + \tau^2 A\right)^{-1} .$$

(1.3)-დან გვაქვს

$$y_{j,k+1} - 2S_j v_k + S_j v_{k-1} = \tau^2 \eta_j^{-1} S_j f_j(t_k) \ , \tag{1.7}$$

სადაც $j = 1, \ldots, m$,

$$S_j = \left(I + \tau^2 \eta_j^{-1} A_j\right)^{-1} .$$

თუ (1.7) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ η_j-ზე, მივიღებთ

$$\eta_j y_{j,k+1} - 2\eta_j S_j v_k + \eta_j S_j v_{k-1} = \tau^2 \eta_j \eta_j^{-1} S_j f_j(t_k) \tag{1.8}$$

შემდეგ აჯამვის შედეგად მიიღება ტოლობა

$$v_{k+1} - 2Sv_k + Sv_{k-1} = \tau^2 \psi_k \ , \tag{1.9}$$

სადაც $k = 1, \ldots, n-1$,

$$S = \sum_{j=1}^{m} \eta_j S_j \ , \quad \psi_k = \sum_{j=1}^{m} S_j f_j(t_k) \ .$$

თუ (1.6)-ს გამოვაკლებთ (1.9)-ს, მივიღებთ:

$$z_{k+1} - 2Sz_k + Sz_{k-1} = r_k \ , \tag{1.10}$$

სადაც $z_k = v_k - u(t_k)$,

$$r_k = r_{0,k} + r_{1,k} - L(\tau^2 r_{2,k} + r_{3,k}) + r_{4,k}$$

$$r_{0,k} = (S - L)u(t_k),$$

$$r_{1,k} = (S - L)[u(t_k) - u(t_{k-1})],$$

$$r_{2,k} = A[u(t_{k+1}) - u(t_k)],$$

$$r_{4,k} = \tau^2[\psi_k - L\widetilde{f}(t_k)],$$

$$r_{3,k} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)[u''(t) - u''(t_k)]dt +$$
$$+ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1})[u''(t) - u''(t_k)]dt.$$

(1.9) განტოლების ამონახსნის ცხადი სახით წარმოდგენისთვის ჩვენ დაგვჭირდება გარკვეული კლასის პოლინომები, რომლებსაც ვუწოდებთ ჩებიშევის ორი ცვლადის პოლინომებს. ეს პოლინომები განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებით:

$$\widetilde{U}_{k+1}(x, y) = x\widetilde{U}_k(x, y) - y\widetilde{U}_{k-1}(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots \quad ,$$

$$\widetilde{U}_1(x, y) = x, \quad \widetilde{U}_0(x, y) = 1.$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ სამშრიანი ნახევარდისკრეტული სქემების გამოკვლევას ჩებიშევის პოლინომების საშუალებით ეძღვნება შრომები [29],[30].

$\widetilde{U}_k(x, y)$ ჩვენ ვუწოდებთ ჩებიშევის ორი ცვლადის პოლინომებს, რადგან $U_k(x) = \widetilde{U}_k\,(2x, 1)$ წარმოადგენს ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომებს.

მარტივად მიიღება შემდეგი ფორმულა:

$$U_k(x,y) = \sqrt{y^k} U_k(\xi, 1), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad y > 0 \, , \tag{1.11}$$

რომელიც ამყარებს კავშირს $\widetilde{U}_k(x,y)$ და $U_k(x)$-ს შორის.

ჩვენ უკვე ცხადად შეგვიძლია ჩავწეროთ (2.9) განტოლების ამონახსნი $\widetilde{U}_k(x,y)$ პოლინომების საშუალებით. ინდუქციის გამოყენებით მიიღება:

$$z_{k+1} = \widetilde{U}_k \left(2S, S\right) z_1 - S \widetilde{U}_{k-1} \left(2S, S\right) z_0 + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{U}_{k-i} \left(2S, S\right) r_i \, . \tag{1.12}$$

შენიშნვა 1.2.1 რადგან $S_j \quad (j = 1, \ldots, m)$ თვითშეუღლებული, არაუარყოფითი შემოსაზღვრული ოპერატორებია, ამიტომ S ოპერატორიც ასევე იქნება თვითშეუღლებული, არაუარყოფითი და შემოსაზღვრული. მაშინ, არსებობს ერთადერთი კვადრატული ფესვი $S^{1/2}$

დამტკიცება. ყოველი თვითშეუღლებული მატრიცი შესაძლებელია უნიტარული გარდაქმნით მივიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე, ანუ სამართლიანია წარმოდგენა $S = UDU^*$, სადაც U არის უნიტარული მატრიცა, ხოლო D არის დიაგონალური მატრიცა, სადაც დიაგონალზე დგას S მატრიცის საკუთრივი რიცხვები,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

რადგან A მატრიცი არაუარყოფითია, მაშინ მისი საკუთრივი რიცხვებიც იქნება არაუარყოფითი ამიტომაც

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

და საძიებელი მატრიცი იქნება $B = UD^{1/2}U^*$, რადგანაც

$$B^2 = UD^{1/2}u^*UD^{1/2}u^* = UD^{1/2}ID^{1/2}u^* = U(D^{1/2})^2U^* = UDU^* = S$$

ახლა დავამტკიცოთ ერთადერთობა. ამისათვის დავუშვათ რომ არსებობს სხვა C მატრიცა თვისებით $\quad C^2 = S$,

მაშინ მივიღებთ, რომ $B^2 = C^2$, აქედან $(B^2u, u) = (c^2u, u)$

და ამიტომ $||Bu|| = ||Cu||$. აქედან ცხადია $(Bu, u) = (Cu, u)$,

ე.ი. $((B - C)u, u) = 0$, საბოლოოდ მივიღებთ $B - C = 0$ ანუ $B = C$.

ერთადერთობა დამტკიცებულია.

მოყვანილი ფაქტის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ ტოლობა

$$\widetilde{U}_k\,(2S, S) = B^k\widetilde{U}_k\,(2B, I) = B^kU_k(B)\ , \quad B = S^{1/2}.$$

და ამ ტოლობის გათვალისწინებით (1.12) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$z_{k+1} = B^kU_k(B)z_1 - B^{k+1}U_{k-1}(B)z_0 + \sum_{i=1}^{k} B^{k-i}U_{k-i}(B)r_i\ . \tag{1.13}$$

ფორმულა (1.13) არის ძირითადი დამოკიდებულება. მისი გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.2.1 თუ (1.1),(1.2) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$||v_k - u(t_k)|| \le \tfrac{1}{\eta\sqrt{v}} + (||v_0 - \phi_0|| + ||v_1 - u(\tau)|| +$$

$$+\tau \sum_{i=1}^{k-1} \Big(\tau c_1||Au(t_i|| + \tau c_2||f(t_i)|| + \tau c_3 \sum_{j=1}^{m} ||f_j(t_i)|| +$$

$$+c_1||A^{1/2}(u(t_i) - u(t_{i-1}))|| + c_2||A^{1/2}u(t_{i+1} - u(t_i))|\Big) +$$

$$+c_2 \sum_{i=!}^{k-1} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \Big(||A^{1/2}[u(t) - u(t_i)]|| + ||A^{-1/2}[f(t) - f(t_i)]||\Big)dt$$

სადაც k=2, . . ,n, $\qquad v = \min\limits_j v_j, \qquad c_3 = (\min\limits_j \eta - j)^{-1/2}$,

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} \eta_j^{-3/2}(\eta_j^{-1}\alpha_j + 1), \qquad \alpha_j = ||A - jA^{-1}|| < \infty,$$

$$c_2 = 1 + c_), \quad c_0 = \sum_{j=1}^{m} \eta_j^{-1/2}\alpha_j.$$

ამ თეორემის დამტკიცებას დამხმარე ფაქტების განხილვის შემდეგ დავუბრუნდებით.

შენიშნვა 1.2.2. ცხადია, A_jA^{-1} $(j = 1, \ldots, m)$ ჩაკეტილი ოპერატორებია, ამიტომ ჩაკეტილი გრაფიკის შესახებ თეორემის მიხედვით, ისინი შემოსაზღვრულია, ანუ

$$a_j = \|A_jA^{-1}\| < \infty \ .$$

ლემა 1.2.1 ნებისმიერი j-თვის $(j = 1, \ldots, m)$ $D(A^{1/2}) \subset D(A_j^{1/2})$ და

$$\left\|A_j^{1/2}u\right\| \leq \left\|A^{1/2}u\right\|, \quad \forall u \in D(A^{1/2}). \tag{1.14}$$

დამტკიცება: ვთქვათ$u_j = A_j^{-1}u$ და $v = A^{-1}u$,სადაც u არის ნებისმიერი ვექტორი H-დან. მაშინ გვაქვს:

$$\begin{aligned} \left\|A^{-1/2}u\right\|^4 &= \left(A^{-1}u, u\right)^2 = (v, A_ju_j)^2 = \left(A_j^{1/2}v, A_j^{1/2}u_j\right)^2 \leq \\ &\leq \left\|A_j^{1/2}v\right\|^2 \left\|A_j^{1/2}u_j\right\|^2 . \end{aligned} \tag{1.15}$$

რადგან $v \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \left\|A_j^{1/2}v\right\|^2 = \left(A_j^{1/2}v, A_j^{1/2}v\right) &= (A_jv, v) \leq (Av, v) = \left\|A^{1/2}v\right\|^2 = \\ &= \left\|A^{-1/2}u\right\| \ . \end{aligned} \tag{1.16}$$

თუ (1.16)-ს გავითვალისწინებთ (1.15)-ში, მივიღებთ
$\left\|A^{-1/2}u\right\|^4 \leq \left\|A^{-1/2}u\right\|^2 \left\|A_j^{1/2}u_j\right\|^2$

შევკვეცით და $u_j = A_j^{-1}u$ გამოსახულების ჩასმით მივიღებთ,

$$\left\|A^{-1/2}u\right\| \leq \left\|A_j^{-1/2}u\right\|, \quad \forall u \in H.$$

აქედან V.2.30 ლემის ძალით [18]-დან, გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობა (1.14).

შენიშნვა 1.2.3. თუ A და B თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორები ისეთია, რომ $D(A) \subset D(B)$ და $B \leq A$ ($(Bu, u) \leq (Au, u)$, $\forall u \in D(A)$), მაშინ $A^{-1} \leq B^{-1}$.

მართლაც,

$$(A^{-1}f,\ f)^2 = (v,\ Bu)^2 = (B^{1/2}v,\ B^{1/2}u)^2 \le$$

$$\le \|B^{1/2}v\|^2 \|B^{1/2}u\|^2 = (Bv, v)(Bu, u) \le$$

$$\le (Av, v)(Bu, u) = (f,\ A^{-1}f)(f,\ B^{-1}f) =$$

$$= (A^{-1}f,\ f)(B^{-1}f,\ f).$$

აქ გამოვიყენეთ აღნიშვნები $u = B^{-1}f$, $v = A^{-1}f$

შეკვეცის შემდეგ მიიღება

$$\left(A^{-1}f,\ f\right) \le \left(B^{-1}f,\ f\right),$$

ან რაც იგივეა

$$A^{-1} \le B^{-1}.$$

შენიშნვა 1.2.4. სამართლიანია ფორმულა

$$S - L = \tau^2 \sum_{j=1}^{m} \eta_j^{-1} \left(I - S_j\right) \left(\eta_j^{-1} A_j A^{-1} - I\right) AL\ . \tag{1.17}$$

მართლაც, რადგან

$$I - S = \sum_{j=1}^{m} \eta_j \left(I - S_j\right) = \tau^2 \sum_{j=1}^{m} A_j S_j\ ,$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} S - L &= \left[S\left(I + \tau^2 A\right) - I\right] L = \left[(S - I) + \tau^2 AS\right] L \\ &= \tau^2 \sum_{j=1}^{m} \left(\eta_j S_j A - A_j S_j\right) L\ . \end{aligned}$$

აქედან, შემდეგი ტოლობის გათვალისწინებით,

$$\begin{aligned} \eta_j S_j A - A_j S_j &= \eta_j S_j A - S_j A_j = S_j \left(\eta_j A - A_j\right) \\ &= \left(S_j - I\right)\left(\eta_j A - A_j\right) + \left(\eta_j A - A_j\right)\ , \end{aligned}$$

გამომდინარეობს (1.17) .

S და L ოპერატორების სიახლოვეზე შეგვიძლია ვიმსჯელოთ აგრეთვე შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

$$
\begin{aligned}
S_j &= \tau^4\eta_j^{-2}A_j^2S_j - \tau^2\eta_j^{-1}A_j + I\ ,\\
S &= \tau^4\sum_{j=1}^{m}\eta_j^{-1}A_j^2S_j - \tau^2A + I\ ,\\
L &= \tau^4A^2L - \tau^2A + I\ .
\end{aligned}
$$

ლემა 1.2.2. მართებულია შემდეგი უტოლობა

$$
\left\|(I-S)^{-1/2}ALf\right\| \le \tau^{-1}\left(m\left\|A^{1/2}Lf\right\| + c_0\left\|A^{1/2}L^{1/2}f\right\|\right), \quad f\in H, \tag{1.18}
$$

დამტკიცება: განვიხილოთ შემდეგი უტოლობა:

$$
I - S \ge \eta_j\left(I - S_j\right) = \tau^2A_jS_j > 0,
$$

მისი გამოყენებით მიიღება (იხ.შენიშნვა 1.2.3.)

$$
\begin{aligned}
(I-S)^{-1} &\le \eta_j^{-1}\left(I-S_j\right)^{-1} = \tau^{-2}\left(I + \tau^2\eta_j^{-1}A_j\right)A_j^{-1} =\\
&= \tau^{-2}A_j^{-1} + \eta_j^{-1}I \le \left(\tau^{-1}A_j^{-s} + \eta_j^{-s}I\right)^2, \quad s = \frac{1}{2}\ .
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

ამრიგად, გვაქვს

$$
\|(I-S)^{-s}f\| \le \|(\tau^{-1}A_j^{-s} + \eta_j^{-s}I)f\| \le
$$

$$
\le \tau^{-1}\left\|A_j^{-s}f\right\| + \eta_j^{-s}\left\|f\right\|, \quad f\in H
$$

და თუ ახლა გამოვიყენებთ ამ უტოლობას, მივიღებთ (ქვევით ყველგან $s = 1/2$):

$$
\|(I-S)^{-s}ALf\| = \|(I-S)^{-s}\sum_{j=1}^{m}A_jLf\| \le
$$

$$
\le \tau^{-1}\textstyle\sum_{j=1}^{m}(\|A_j^sLf\| + \tau\eta_j^{-s}\|A_jLf\|)\ .
$$

ლემა 1.2.1.-ის თანახმად გვაქვს

$$
\left\|A_j^sLf\right\| \le \left\|A^sLf\right\|. \tag{1.20}
$$

და შენიშნვა 1.2.2.-ის თანახმად

$$
\left\|A_jLf\right\| \le \left\|A_jA^{-1}\right\|\left\|ALf\right\| = a_j\left\|ALf\right\|. \tag{1.21}
$$

(1.2)-დან (1.20) და (1.21)-ის გათვალისწინებით მიიღება

$$\left\|(I-S)^{-s}ALf\right\| \leq m\tau^{-1}\left\|A^sLf\right\| + c_0\left\|ALf\right\|.$$

აქედან შემდეგი უტოლობის

$$\|ALf\| = \|A^sL^s\left(A^sL^sf\right)\| \leq \|A^sL^s\|\,\|A^sL^sf\| \leq \tau^{-1}\|A^sL^sf\|$$

გათვალისწინებით მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა (1.18).

ლემა 1.2.3. სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$S-L = \tau^2\sum_{j=1}^{m}\eta_j^{-1}(I-S_j(\eta_j^{-1}A_jA^{-1}-I)AL$$

დამტკიცება: რადგან

$$I-S = \sum_{j=1}^{m}\eta_j(I-S_j) = \tau^2\sum_{j=1}^{m}A_jS_j$$

მაშინ

$$S-L = [S(I+\tau^2A)-I]L = [(S-I)+\tau^2SA]L = \tau^2\sum_{j=1}^{m}(\eta_jS_jA-A_jS_j)L$$

ახლა თუ გამოვიყენებთ შემდეგ ტოლობას

$$\eta_jS_jA-A_jS_j = \eta_jS_jA-S_jA_j = (S_j-I)(\eta_jA-A_j)+(\eta_jA-A_j).$$

მივიღებთ დასამტკიცებელ წარმოდგენას.

ლემა 1.2.4. სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|(I-S)^{-1/2}(S-L)f\right\| \leq \tau^2c_1\left\|ALf\right\|, \quad f\in H, \tag{1.22}$$

$$\left\|(I-S)^{-1/2}LAu\right\| \leq \tau^{-1}c_2\left\|A^{1/2}u\right\|, \quad u\in D(A), \tag{1.23}$$

$$\left\|(I-S)^{-1/2}Lf\right\| \leq \tau^{-1}c_2\left\|A^{-1/2}f\right\|, \quad f\in H. \tag{1.24}$$

დამტკიცება (1.19)-დან გვაქვს

$$\left\|(I-S)^{-1/2}h\right\| \leq \eta_j^{-1/2}\left\|(I-S_j)^{-1/2}h\right\|, \quad h\in H. \tag{1.25}$$

თუ აქ ჩავსვამთ $h=(I-S_j)\,f$ მივიღებთ

$$\left\|(I-S)^{-1/2}(I-S_j)\,f\right\| \leq \eta_j^{-1/2}\left\|(I-S_j)^{1/2}f\right\| \leq \eta_j^{-1/2}\left\|f\right\|. \tag{1.26}$$

ამ უტოლობიდან და (1.18)-დან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} & \left\| (I-S)^{-1/2}(S-L)\,f \right\| \leq \\ \leq \quad & \tau^2 \sum_{j=1}^{m} \eta_j^{-1} \left\| (I-S)^{-1/2}(I-S_j)\left(\eta_j^{-1}A_jA^{-1}-I\right)ALf \right\| \leq \\ \leq \quad & \tau^2 \sum_{j=1}^{m} \eta_j^{-3/2} \left\| \left(\eta_j^{-1}A_jA^{-1}-I\right)ALf \right\| \leq \tau^2 c_1 \left\| ALf \right\| \ . \end{aligned}$$

ცხადია (1.24) უტოლობა გამომდინარეობს 1.23)-დან.

ლემა 1.2.5. $U_k(B)$ ოპერატორული პოლინომებისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$\left\| BU_k(B) \right\| \leq \left(\tau\sqrt{\nu}\right)^{-1}, \quad \nu = \min_{1\leq j\leq m}(\alpha_j)\ , \tag{1.27}$$

$$\left\| U_k(B)\left(I-B^2\right)^{1/2} \right\| \leq 1\ , \tag{1.28}$$

$$\left\| U_k(B) - BU_{k-1}(B) \right\| \leq 1+\sqrt{2}\ , \tag{1.29}$$

$$\left\| BU_k(B) - U_{k-1}(B) \right\| \leq 1+\sqrt{2}\ . \tag{1.30}$$

დამტკიცება: როგორც ცნობილია, ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომებისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|U_k(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad x \in]-1,1[\ , \tag{1.31}$$

რომელიც გამომდინარეობს კარგად ცნობილი ფორმულიდან

$$U_k(x) = \frac{\sin\left((k+1)\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1,1[\ .$$

ამ ფორმულიდან მარტივი გამოთვლების ჩატარების შედეგად მივიღებთ ასევე შეფასებას

$$|U_k(x) - U_{k-1}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{1+x}}\ , \quad x \in]-1,1[\ . \tag{1.32}$$

მართლაც, გვაქვს

$$\begin{aligned}
|U_k(x) - U_{k-1}(x)| &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left| \cos(k+\frac{\theta}{2}) \sin\frac{\theta}{2} \right| \le \\
&\le \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{2}{1+x}}\,, \quad x \in]-1,1[\,,
\end{aligned}$$

სადაც $\theta = \arccos x$.

(1.31) და (1.32) შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned}
|U_k(x) - xU_{k-1}(x)| &\le |U_k(x) - U_{k-1}(x)| + (1-x)\,|U_{k-1}(x)| \\
&\le \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}\,, \quad x \in]-1,1[\,. \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

ცხდია, ანალოგიურად მიიღება შეფასება

$$|xU_k(x) - U_{k-1}(x)| \le \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}\,, \quad x \in]-1,1[\,. \qquad (1.34)$$

$U_k(B)$ ოპერატორული პოლინომების ნორმის შეფასებისთვის ჩვენ დაგვჭირდება ასევე $B = S^{1/2}$ ოპერატორის სპექტრის შეფასება, რაც ცხადია დაიყვანება S პერატორის სპექტრის შეფასებაზე.

ჯერ შევაფასოთ$S_j = \left(I + \tau^2 \eta_j^{-1} A_j\right)^{-1}$ ოპერატორის სპექტრი. ცხადია, გვაქვს

$$\left(I + \tau^2 \eta_j^{-1} A_j\right) \ge \left(1 + \tau^2 \eta_j^{-1} \alpha_j\right) I > 0\,.$$

აქედან შენიშნვა 1.2.3.-ის ძალით გამომდინარეობს

$$0 < S_j \le \left(1 + \tau^2 \eta_j^{-1} \alpha_j\right)^{-1} I \le \left(1 + \tau^2 \nu\right)^{-1} I\,. \qquad (1.35)$$

თუ გავითვალისწინებთ S-ის წარმოდგენას, მაშინ(1.35)-ის თანახმად გვაქვს

$$0 < S \le \sum_{j=1}^{m} \eta_j \left(1 + \tau^2 \nu\right)^{-1} I = \left(1 + \tau^2 \nu\right)^{-1} I\,.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ

$$Sp\,(S) \subset [0,\ \left(1 + \tau^2 \nu\right)^{-1}]\,.$$

თეორემის ძალით, სპექტრის ასახვის შესახებ, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$Sp\,(B) \subset [0,\ \left(1 + \tau^2 \nu\right)^{-1/2}]\,. \qquad (1.36)$$

ამის შემდეგ მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ(1.27)-(1.30) შეფასებები

ვაჩვენოთ (1.27) შეფასება. როგორც ცნობილია, ოპერატორ-ფუნქციის ნორმა, როცა არგუმენტი წარმოადგენს თვითშეუღლებულ შემოსაზღვრულ ოპერატორს, ტოლია შესაბამისი სკალარული ფუნქციის C- ნორმის სპექტრზე (იხ, [26]). ამ შედეგის ძალით გვაქვს

$$\|BU_k(B)\| \leq \max_{x\in Sp(B)} |xU_k(x)| \ .$$

აქედან (1.31) უტოლობისა და (1.36) დამოკიდებულების გათვალისწინებით მიიღება

$$\|BU_k(B)\| \leq \max_{x\in Sp(B)} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\tau\sqrt{\nu}} \ .$$

ანალოგიურად მიიღება (1.28). მართლაც, გვაქვს

$$\begin{aligned} \left\| U_k(B)\left(I-B^2\right)^{1/2} \right\| &\leq \max_{x\in Sp(B)} \left| U_k(x)\sqrt{1-x^2} \right| \leq \\ &\leq \max_{x\in Sp(B)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} \right) = 1 \ . \end{aligned}$$

(1.33) და (1.34) უტოლობებიდან შესაბამისად გამომდინარეობს (1.29) da (1.30) შეფასებები.

1.3 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება

ახლა დავუბრუნდეთ **თეორემა 1.2.1**-ის დამტკიცებას: (1.13)-იდან, (1.27) და (1.36)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$||z_{k_1}|| \leq (\tau\sqrt{v})^{-1}(||z_0|| + ||z_1||)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{0,i} + \lambda_{1,i} + \tau^2\lambda_{2,i} + \lambda_{3,i} + \lambda_{4,i}),$$

სადაც

$$\lambda_{0,i} = ||Mr_{0,i}||, \qquad \lambda_{1,i} = ||Mr_{1,i}||, \qquad \lambda_{2,i} = ||ML_{2,i}||$$

$$\lambda_{3,i} = ||ML_{0,i}||, \quad \lambda_{4,i} = ||Mr_{4,i}||, \qquad M = (I-S)^{-1/2}, \qquad L = (I+\tau^2 A)^{-1}.$$

ახლა გამოვიყენოთ (1.22)-(1.24) შეფასებები, მათი ძალით გვაქვს

$$\lambda_{0,i} \leq \tau^2 c_1||Au(t_i)||,$$

$$\tau^2\lambda_{1,i} \leq \tau c_1||A^{1/2}[u(t_i) - u(t_{i-1})]||,$$

$$\tau^2\lambda_{2,i} \leq \tau c_2||A^{1/2}[u(t_{i+1}) - u(t_i)]||,$$

$$\lambda_{3,I} \leq c_2\sum_{i=!}^{k-1}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}}\big(||A^{1/2}[u(t) - u(t_i)]||+$$

$$+||A^{-1/2}[f(t) - f(t_i)]||\big)dt.$$

ჯერ შევაფასოთ $r_{4,i}$. მისთვის სამართლიანია უტოლობა:

$$r_{4,i} = \tau^2\sum_{j=1}^{m}(S_j - I)f_j(t_i) + \tau^4 ALf(t_i)$$

შემდეგ (1.18) და (1.19)-დან მიიღება

$$\lambda_{4,i} \leq \tau^2\sum_{j=1}^{m}(s_j - I)f_j(t_i)||+$$

$$+\tau^3\big(||A^{1/2}Lf(t_i)|| + c_0||A^{1/2}L^{1/2}f(t_i)||\big) \leq$$

$$\leq \tau^2\big(c_2||f(t_i)|| + c_3\sum_{j=1}^{m}||f_j(t_i)||\big).$$

მოყვანილი უტოლობების გათვალისწინებით, თეორემა 1.2.1. დამტკიცებულია.

1.4 მიახლოებითი ამონახსნის შესაბამისი პირველი რიგის წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგის ცდომილების შეფასება

განვიხილოთ სხვაობა

$$\frac{v_{k+1}-v_k}{\tau}-u^{'}(t_k) \tag{1.37}$$

(1.13)-ის ძალით,მიიღება შემდეგი წარმოდგენა:

$$z_{k+1}-z_k=(R_k-R_{k-1})z_1-(R_{k-1}-R_{k-2})B^2z_0+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(R_{k-1}-R_{k-i-1})r_i^*+\sum_{i=1}^{k}R_{k-1}\big((r_{0,i}-r_{0,i-1})+$$

$$+(r_{4,1}-r_{4,i-1})\big)+R_{k-1}(r_{0,0}-r_{4,0}),$$

სადაც

$$r_i^*=r_1-r_{0,1}-r_{4,1}\quad R_{k-i}=U_{k-1}(B)B^{k-i},\quad R_{-1}=0.$$

გამოვიყენოთ ეს ფორმულა და ზემოთ მოყვანილი შეფასებები და დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა(შეფასება):

თეორემა 1.3.1 ვთქვათ (1,1)-(1,2) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ თუ $\phi_0\in D(a)$, სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\Big\|\tfrac{z_{k+1}-z_k}{\tau}\Big\|\le c_4\tau^{-1}\big(||z_0||+||z_1||\big)+\tau\sum_{i=1}^{k}\Big[\tau\big(c_1||A\phi_0||+c_2||f(0)||+$$

$$+c_3\sum_{j=1}^{m}||f_j(0)||\big)+c_4J_{1,i}(u^{"})+c_5J_{0,i}(u^{"}(t)++c_4J_{1,i}(f)+$$

$$+c_6J_{0,i}(f)+c_3\sum_{j=1}^{m}J_{0,i}(f_j)\Big]+c_4\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}}||u^{"}(t)-u^{"}(t_1)||dt\le$$

$$\le c_4\tau^{-1}\big(||z_0||+||z_1||\big)+\tau\sum_{i=1}^{k}\Big[\tau\big(c_1||A\phi_0||+c_2||f(0)||+$$

$$c_3\sum_{j=1}^{m}||f_j(0)||\big)+c_4J_{1,i}(u^{"})+c_5J_{0,i}(u^{"})+c_4J_{1,i}(f)+$$

$$c_6J_{0,i}(f)+c_3\sum_{j=1}^{m}J_{0,i}(f_j)\Big]+c_4\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}}||u^{"}(t)-u^{"}(t_1)||dt$$

, სადაც

$$J_{0,i}(u) = ||U(t_i) - u(t_{i-1})||, \qquad J_{1,i}(u) = ||U(t_{i+1}) - u(t_i)||,$$

$$c_6 = c_5 + c_3, \quad c_4 = 1 + \sqrt{2}, \qquad c_5 = c_4 \sum_{j=1}^{m} \eta_j^{-1}(\eta_j^{-1} a_j + 1) + c_1.$$

დამტკიცება ეს შეფასება გამომდინარეობს უკვე მიღებული (1.28), (1.30)-დან, $\lambda_{k,i} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$ გამოსახულებების შეფასებების გამოყენებით.

შენიშნვა 1.3.1 თუ $f(t)$ და $u^{"}(t)$ ფუნქციები ჰელდერის აზრით უწყვეტია [0,T] ინტერვალზე λ მაჩვენებლით, სადაც $\lambda \in (0,1]$, მაშინ რადგან

$$u'(t_k) - \frac{v_{k+1} - v_k}{\tau} = \tau^{-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [u'(t_k) - u'(t)]dt - \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau}$$

მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\max_{1 \le k \le n-1} ||u'(t_k) - \frac{v_{k+1} - v_k}{\tau}|| \le c\tau^{\lambda}, \text{ სადაც } c = const > 0.$$

1.5 ტესტური მაგალითები

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Omega\times]0,T], \tag{1.38}$$

$$u\left(x,y,0\right) = \varphi_0\left(x,y\right), \quad u'_t\left(x,y,0\right) = \varphi_1\left(x,y\right), \tag{1.39}$$

$$u\mid_{\partial\Omega\times]0,T[} = 0\ , \tag{1.40}$$

სადაც $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.

დავფაროთ Ω ერთეულოვანი კვადრატი თანაბარი ბადით, ბიჯით $h = 1/N$ ($N > 1$ - ნატურალური რიცხვია). სივრცითი კოორდინატით წარმოებულები შევცვალოთ შესაბამისად სხვაობიანი ანალოგებით. უცნობი ბადური ფუნქცია აღვნიშნოთ $u^{(h)}(t)$. ანალოგიურად f , φ_0 და φ_1-ის შესაბამისი ფუნქციები კი - $f^{(h)}(t)$, $\varphi_0^{(h)}$ და $\varphi_1^{(h)}$-ით. მაშინ (1.38)-(1.40) ამოცანა მიიყვანება კოშის ამოცანაზე მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისთვის, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2 u^{(h)}(t)}{dt^2} + \Lambda_{1,h} u^{(h)}(t) + \Lambda_{2,h} u^{(h)}(t) = f^{(h)}(t)\ , \tag{1.41}$$

$$u^{(h)}(0) = \varphi_0^{(h)}, \quad \frac{du^{(h)}(0)}{dt} = \varphi_1^{(h)}, \tag{1.42}$$

სადაც $\Lambda_{1,h}$ და $\Lambda_{2,h}$ არის მატრიცები(ოპერატორები), რომლებსაც წარმოქმნიან შესაბამისად x-ით და y-ით მეორე რიგის წარმოებულების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგები.

შემოთავაზებული დეკომპოზიციის ალგორითმის მიხედვით (1.41), (1.42) ამოცანა შეგვიძლია გავხლიჩოთ შემდეგი ორ დამოუკიდებელ ამოცანად:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{y_{1,k+1}^{(h)} - 2v_k^{(h)} + v_{k-1}^{(h)}}{\tau^2} + \Lambda_{1,h} y_{1,k+1}^{(h)} = f^{(h)}(t_k),$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{y_{2,k+1}^{(h)} - 2v_k^{(h)} + v_{k-1}^{(h)}}{\tau^2} + \Lambda_{2,h} y_{2,k+1}^{(h)} = 0,$$

სადაც

$$v_0 = \varphi_0^{(h)}, \quad v_1 = \varphi_0^{(h)} + \tau\varphi_1^{(h)}.$$

მიახლოებით ამონახსნად $t = t_{k+1}$ წერტილში ვაცხადებთ ვექტორს

$$v_{k+1} = \frac{1}{2}\left(y_{1,k+1}^{(h)} + y_{2,k+1}^{(h)}\right).$$

ანალოგიური დეკომპოზიციის ალგორითმი შეგვიძლია ავაგოთ სივრცით სამგანზომილებიანი რხევის ამოცანისთვის.

$\Lambda_{1,h}$ და $\Lambda_{2,h}$ შესაბამისად $(N-1)^2$-ის რიგის ($(N-1)^2 \times (N-1)^2$ -ზე) მატრიცებია, რომელთაც აქვთ შემდეგი სახე:

$$\Lambda_{1,h} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{2,h} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2I & I & 0 & \dots & 0 \\ I & -2I & I & \dots & 0 \\ 0 & I & -2I & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2I \end{pmatrix},$$

სადაც I არის ერთეულოვანი მატრიცი $(N-1)\times(N-1)$ - ზე; A იგივე რიგის მატრიცია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

გაშლილად $u^{(h)}(t)$ ვექტორს ექნება შემდეგი სახე

$$u^{(h)}(t) = \left(u_1^{(h)}(t),\ u_2^{(h)}(t), \dots, u_{N-1}^{(h)}(t)\right)^T,$$

სადაც

$$u_j^{(h)}(t) = (u_{1,j}(t),\ u_{2,j}(t), \dots, u_{N-1,j}(t))^T.$$

გამოვთვალოთ $\Lambda_{1,h}u^{(h)}(t)$ ვექტორი. ცხადია, გვაქვს

$$\Lambda_{1,h}u^{(h)}(t)=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & A & \dots & 0\\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(h)}(t)\\ u_2^{(h)}(t)\\ u_3^{(h)}(t)\\ \vdots\\ u_{N-1}^{(h)}(t)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} Au_1^{(h)}(t)\\ Au_2^{(h)}(t)\\ Au_3^{(h)}(t)\\ \vdots\\ Au_{N-1}^{(h)}(t)\end{pmatrix}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\Lambda_{1,h}u^{(h)}(t)$ ვექტორის $(i;j)$ კანძითი წერტილის (ცხადია ყოველი ფიქსირებულ j-თვის $i=1,\ 2,\dots,N-1$) შესაბამისი კომპონენტი იქნება

$$\left(\Lambda_{1,h}u^{(h)}(t)\right)_{i,j}=\frac{u_{i+1,,j}(t)-2u_{i,,j}(t)+u_{i-1,,j}(t)}{h^2}\,. \tag{1.43}$$

ტოლობიდან

$$\Lambda_{2,h}u^{(h)}(t)=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2I & I & 0 & \dots & 0\\ I & -2I & I & \dots & 0\\ 0 & I & -2I & \dots & 0\\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(h)}(t)\\ u_2^{(h)}(t)\\ u_3^{(h)}(t)\\ \vdots\\ u_{N-1}^{(h)}(t)\end{pmatrix}$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\left(\Lambda_{2,h}u^{(h)}(t)\right)_{i,j}=\frac{u_{i,,j+1}(t)-2u_{i,,j}(t)+u_{i,,j-1}(t)}{h^2}\,. \tag{1.44}$$

მართლაც, გვაქვს

$$\begin{aligned}\left(\Lambda_{2,h}u^{(h)}(t)\right)_{i,j} &= \left(u_{j-1}^{(h)}(t)-2u_j^{(h)}(t)+u_{j+1}^{(h)}(t)\right)_i=\\ &= u_{i,,j+1}(t)-2u_{i,,j}(t)+u_{i,,j-1}(t).\end{aligned}$$

თუ(1.43) და (1.44) წარმოდგენებს ჩავსვამთ (1.41)-ში, მივიღებთ $(i;j)$ კვანძითი წერტილის შესაბამის სხვაობიან მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას.

შენიშნვა 4.1. თუ მოვახდენთ (1.38)-(1.40) ამოცანის გახლეჩვას შემოთავაზებული დეკომპოზიციის სქემის მიხედვით, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\frac{1}{2}\frac{w_{1,k+1}-2v_k+v_{k-1}}{\tau^2}-\frac{d^2w_{1,k+1}}{dx^2}=f_1(x,y,t_k), \quad x\in]0,\ 1[\ , \tag{1.45}$$

$$w_{1,k+1}(0,y)=w_{1,k+1}(1,y)=0, \tag{1.46}$$

$$\frac{1}{2}\frac{w_{2,k+1}-2v_k+v_{k-1}}{\tau^2}-\frac{d^2w_{2,k+1}}{dy^2}=f_2(x,y,t_k), \quad y\in]0,\ 1[\ , \tag{1.47}$$

$$w_{2,k+1}(x,0)=w_{2,k+1}(x,1)=0, \tag{1.48}$$

სადაც $f=f_1+f_2$,

$$v_0=\varphi_0(x,y), \quad v_1=\varphi_0(x,y)+\tau\varphi_1(x,y).$$

მიახლოებით ამონახსნად $t=t_{k+1}$ წერტილში ვაცხადებთ ვექტორს

$$v_{k+1}=\frac{1}{2}\left(w_{1,k+1}+w_{2,k+1}\right).$$

ბუნებრივია მოვითხოვოთ, რომ ყოველი k-თვის v_k მიახლოებამ დააკმაყოფილოს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები. თუ მოვითხოვთ, რომ $\varphi_1(x,y)$ ფუნქციამ დააკმაყოფილოს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები, ცხადია v_1 ავტომაურად დააკმაყოფილებს ერგვაროვან სასაზღვრო პირობებს ($\varphi_0(x,y)$ ისედაც აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს). რაც შეეხება v_2-ს, ის არის საშუალო არითმეტიკული $w_{1,2}$ და $w_{2,2}$-ის. $w_{1,2}(x,y)$ არის (1.45), (1.46) ამოცანის ამონახსნი (y ასრულებს პარამეტრის როლს). ცხადია, რომ აუცილებელი არ არის $w_{1,2}(x,y)$ ამონახსნმა y პარამეტრის მიმართ შუალედის ბოლოებში ($y=0$ და $y=1$) დააკმაყოფილოს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები. ამ ფაქტს ადგილი რომ ჰქონდეს, საჭიროა (1.45) განტოლება გახდეს ერთგვაროვანი, შესაბამისად $y=0$ და $y=1$ წრფეებზე, ე.ი. უნდა შესრულდეს პირობები $f_1(x,0,t_1)\equiv 0$ და $f_1(x,1,t_1)\equiv 0,\ x\in[0,\ 1]$. ანალოგიურად $w_{2,2}(x,y)$-ის შემთხვევაში უნდა შესრულდეს პირობები $f_2(0,y,t_1)\equiv 0$ და $f_2(1,y,t_1)\equiv 0,\ y\in[0,\ 1]$. თუ მოვითხოვთ, რომ ყოველი k-თვის v_k მიახლოებამ დააკმაყოფილოს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები, ცხადია ზემოთ მოყვანილი პირობები უნდა შესრულდეს ყოველ t_k წერტილში.

შენიშნვა 4.2. (1.38)-(1.40) ამოცანისთვის A ოპერატორი იქნება $(-\Delta)$ ოპერატორის გაფართოება თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე $L^2(\Omega)$ სივრცეში (აქ იგულისხმება, რომ $(-\Delta)$ ოპერატორის განსაზღვრის არეა C^2 კლასის ფუნქციები, რომლებიც Ω არის საზღვარზე, $\partial\Omega$-ზე ხდება ნულის ტოლი).

ტესტი1. განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული ამოცანა:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 2\pi^2 \chi(x,y), \quad (x,y,t) \in]0,1[^2 \times]0,T], \tag{1.49}$$

$$u\,(x,y,0) = \chi(x,y), \quad u_t'(0) = 0, \tag{1.50}$$

$$u\mid_{x=0,1} = 0, \quad u\mid_{y=0,1} = 0, \tag{1.51}$$

სადაც $\chi(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

ცხადია (1.49)-(1.51) ამოცანის ამონახსნია $u(x,y,t) = \chi(x,y)$.

თუ (1.49)-(1.51) ამოცანისთვის გამოვიყენებთ შემოთავაზებული დეკომპოზიციის ალგორითმს, მივიღებთ შემდეგ გახლეჩილ სისტემას:

$$\frac{1}{2}\frac{w_{1,k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{\tau^2} - \frac{d^2 w_{1,k+1}}{dx^2} = \pi^2 \chi(x,y), \quad x \in]0,\ 1[\ , \tag{1.52}$$

$$w_{1,k+1}(0,y) = w_{1,k+1}(1,y) = 0, \tag{1.53}$$

$$\frac{1}{2}\frac{w_{2,k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{\tau^2} - \frac{d^2 w_{2,k+1}}{dy^2} = \pi^2 \chi(x,y), \quad y \in]0,\ 1[\ , \tag{1.54}$$

$$w_{2,k+1}(x,0) = w_{2,k+1}(x,1) = 0, \tag{1.55}$$

სადაც

$$v_0 = \chi(x,y), \quad v_1 = \chi(x,y).$$

მიახლოებით ამონახსნად $t = t_{k+1}$ წერტილში ვაცხადებთ ფუნქციას

$$v_{k+1} = \frac{1}{2}\left(w_{1,k+1} + w_{2,k+1}\right).$$

(1.52)-დან გვაქვს

$$w_{1,2} - 2\tau^2 \frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} = 2v_1 - v_0 + 2\tau^2\pi^2\chi(x,y).$$

თუ ამ განტოლებაში ჩავსვამთ v_0 და v_1-ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$w_{1,2} - 2\tau^2 \frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} = \left(1 + 2\tau^2\pi^2\right) \chi(x,y). \tag{1.56}$$

ცხადია, (1.56) განტოლების ამონახსნი (1.53) სასაზღვრო პირობებით იქნება $w_{1,2}(x,y) = \chi(x,y)$.

$$w_{1,k+1} = c_{1,k+1}\chi(x,y),$$

$$c_{1,k+1}\left(1 + 2\tau^2\pi^2\right) \chi(x,y) = \left(2c_k - c_{k-1} + 2\tau^2\pi^2\right) \chi(x,y),$$

$$c_{1,k+1} = \frac{1}{1 + 2\tau^2\pi^2}\left(2c_k - c_{k-1} + 2\tau^2\pi^2\right),$$

$$c_{2,k+1} = \frac{1}{1 + 2\tau^2\pi^2}\left(2c_k - c_{k-1} + 2\tau^2\pi^2\right),$$

$$c_{k+1} = \frac{1}{1 + 2\tau^2\pi^2}\left(2c_k - c_{k-1} + 2\tau^2\pi^2\right)$$

თავი 2

პარალელური დეკომპოზიციის სქემა კვაზიწრფივი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის

2.1 ამოცანის დასმა

განვხილოთ კოშის ამოცანა

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + M(u(t)) = f(t), t \in [0, T] \tag{2.1}$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad \frac{du(t)}{dt} = \varphi_1 \tag{2.2}$$

სადაც $\overline{D\,(A)} = H$, $\quad A^* = A$ და $(Au, u) \geq \alpha||u||^2 \qquad \forall u \in D(A)$, $\alpha = const > 0$

$\|\ .\ \|$ და (.,.) არის შესაბამისად ნორმა და სკალარული ნამრავლი განმარტებული H ჰილბერტის სივრცეში სივრცეში. არაწრფივი ოპერატორი $M\,(\cdot)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, ანუ

$\|M(u) - M(v)\| \leq a\, \|u - v\|\,, \quad \forall u, v \in H,\, a = const > 0.$

ხოლო φ_0 და φ_1 მოცემული ვექტორებია H-დან;

$u(t)$ ფუნქცია არის საძიებელი ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, მნიშვნელობებით H-სივრცეში და $f(t)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა.

ისევე, როგორც წრფივ შემთხვევაში, $u(t)$ ვექტორ-ფუნქციას, განსაზღვრულს [0,T] ინტერვალზე მნიშვნელობებით H-ში, ვუწოდებთ (2.1),(2.2) ამოცანის ამონახსნს, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $u(t)$ არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი $[0, T]$ ინტერვალში

ბ) $u(t) \in D(A)$ ყოველი t-სთვის $[0, T]$-დან და $Au(t)$ ფუნქცია არის უწყვეტი

გ) $u(t)$ აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას $[0, T]$ ინტერვალზე და (2.2) საწყის პირობებს.

აქ უწყვეტობა და დიფერენცირებადობა განსაზღვრულია H სივრცის მეტრიკით.

ვთქვათ

$$A = \sum_{j=1}^{m} A_j,\ A_j = A_j^* \geq \alpha_j I,\ \alpha_j = const > 0$$

მაშინ (2.1), (2.2) ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს

$t = t_{k+1} = (k+1)\tau$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\tau = T/n$ ($n > 1$)

წერტილებში განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$v_{k+1} = \sum_{j=1}^{m} \eta_j y_{j,k+1}\ , \quad \sum_{j=1}^{m} \eta_j = 1, \quad 0 < \eta_j < 1,$$

სადაც $y_{j,k+1}$ არის ამონახსნი შემდეგი სხვაობიანი სქემის:

$$\eta_j \frac{y_{j,k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{\tau^2} + A_j y_{j,k+1} = \delta_{i,J}[f(t_k) - M(v_k)] \tag{2.3}$$

$$v_0 = \varphi_0\ , \quad v_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1\ , \tag{2.4}$$

ამრიგად, ისევე, როგორც წრფივ შემთხვევაში,რომ ავაგოთ t_{k+1} წერტილში (2.1), (2.2) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი v_{k+1} საჭიროა ამოვხსნათ პარალელურად m ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი ამოცანა. გამომდინარე აქედან (2.3)სქემას შეგვიძლია ვუწოდოთ პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის სქემა.

2.2 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილობის წარმოდგენა ჩებიშევის პოლინომების საშუალებით და ძირითადი თეორემა

ამ პარაგრაფში, წრფივი შემთხვევის ანალოგიურად, ნაჩვენები იქნება წარმოდგენილი სქემის კრებადობა ჩებიშევის პოლინომების დახმარებით.

ვთქვათ (2.1), (2.2) ამოცანას აქვს ამონახსნი, მაშინ (2.1) განტოლება $t = t_{k+1}$ წერტილში შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე

$$\frac{u(t_{k+1}) - 2u(t_k) + u(t_{k-1})}{\tau^2} + Au(t_{k+1}) = g_k \ , \tag{2.5}$$

სადაც

$$\begin{aligned} g_k \ &= \ \widetilde{f}(t_k) + A\left[u(t_{k+1}) - u(t_k)\right] + \tau^{-2}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)\left[u''(t) - u''(t_k)\right]dt + \\ &+\tau^{-2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1})\left[u''(t) - u''(t_k)\right]dt \ , \quad \widetilde{f}(t) = f(t) - M(u(t)) \ . \end{aligned}$$

(2.5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$u(t_{k+1}) - 2Lu(t_k) + Lu(t_{k-1}) = \tau^2 Lg_k \ , \tag{2.6}$$

სადაც $k = 1, \ldots, n-1$, და

$$L = \left(I + \tau^2 A\right)^{-1} .$$

(2.3)-დან გვაქვს

$$y_{j,k+1} - 2S_j v_k + S_j v_{k-1} = \tau^2 \eta_j^{-1} \delta_{1,j} S_j \left[f(t_k) - M\left(v_k\right)\right] \ , \tag{2.7}$$

სადაც $j = 1, \ldots, m$,

$$S_j = \left(I + \tau^2 \eta_j^{-1} A_j\right)^{-1} .$$

თუ (2.7) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებით და შემდეგ აჯამვით მივიღებთ η_j-ზე, მივიღებთ

$$v_{k+1} - 2Sv_k + Sv_{k-1} = \tau^2 \psi_k \ , \tag{2.8}$$

სადაც $k=1,\ldots,n-1$,

$$S=\sum_{j=1}^{m}\eta_j S_j\ ,\quad \psi_k=\sum_{j=1}^{m}\delta_{i,j}S_j\left[f(t_k)-M\left(v_k\right)\right]=S_1\left[f(t_k)-M\left(v_k\right)\right]\ .$$

თუ (2.6)-ს გამოვაკლებთ (2.8)-ს, მივიღებთ:

$$z_{k+1}-2Sz_k+Sz_{k-1}=r_k\ , \tag{2.9}$$

სადაც $z_k=v_k-u(t_k)$,

$$r_k=r_{0,k}+r_{1,k}-L(\tau^2 r_{2,k}+r_{3,k})+r_{4,k}$$

$$r_{0,k}=(S-L)u(t_k)$$

$$r_{1,k}=(S-L)[u(t_k)-u(t_{k-1})]$$

$$r_{2,k}=A[u(t_{k+1})-u(t_k)],\qquad r_{4,k}=\tau^2[\psi_k-L\widetilde{f}(t_k)]$$

$$\begin{aligned} r_{3,k}=&\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-t)[u''(t)-u''(t_k)]dt+\\ &+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t-t_{k-1})[u''(t)-u''(t_k)]dt \end{aligned}$$

(2.9) განტოლების ამონახსნის ცხადი სახით წარმოდგენისთვის ისევ ვიყენებთ ჩებიშევის პოლინომებს, რომლებიც ჩაიწერება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებებით:

$$\widetilde{U}_{k+1}(x,y)=x\widetilde{U}_k(x,y)-y\widetilde{U}_{k-1}(x,y),\quad k=1,2,\ldots\quad ,$$

$$\widetilde{U}_1(x,y)=x,\quad \widetilde{U}_0(x,y)=1.$$

$\widetilde{U}_k(x,y)$ ჩვენ ვუწოდებთ ჩებიშევის ორი ცვლადის პოლინომებს, რადგან $U_k(x)=\widetilde{U}_k\left(2x,1\right)$ წარმოადგენს ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომებს. და შემდეგი ფორმულა:

$$U_k(x,y)=\sqrt{y^k}U_k(\xi,1),\quad \xi=\frac{x}{\sqrt{y}},\quad y>0\ , \tag{2.10}$$

ამყარებს კავშირს $\widetilde{U}_k(x,y)$ და $U_k(x)$-ს შორის.

ახლა ცხადად ჩავწეროთ (2.9) განტოლების ამონახსნი $\widetilde{U}_k(x,y)$ პოლინომების საშუალებით. ინდუქციის გამოყენებით მიიღება:

$$z_{k+1}=\widetilde{U}_k\left(2S,S\right)z_1-S\widetilde{U}_{k-1}\left(2S,S\right)z_0+\sum_{i=1}^{k}\widetilde{U}_{k-i}\left(2S,S\right)r_i\ . \tag{2.11}$$

უკვე ნაჩვენები გვაქვს, რომ რადგან S_j (j= $1,\ldots,m$) თვითშეუღლებული, არა-უარყოფითი შემოსაზღვრული ოპერატორებია, ამიტომ S ოპერატორიც ასევე იქნება თვითსეუღლებული, არაუარყოფითი და შემოსაზღვრულია და არსებობს ერთადერთი კვადრატული ფესვი $S^{1/2}$

მოყვანილი ფაქტის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ ტოლობა

$$\widetilde{U}_k\left(2S,S\right)=B^k\widetilde{U}_k\left(2B,I\right)=B^kU_k(B)\ ,\quad B=S^{1/2}.$$

და ამ ტოლობის გათვალისწინებით (2.11) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$z_{k+1}=B^kU_k(B)z_1-B^{k+1}U_{k-1}(B)z_0+\sum_{i=1}^{k}B^{k-i}U_{k-i}(B)r_i\ . \tag{2.12}$$

ფორმულა (2.12) არის ძირითადი დამოკიდებულება. მისი გამოყენებით მტკიც-დება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.2.1. ვექტორები $\left(u_k-u_{k-1}\right)/\tau$, $A^{1/2}u_k$ და Au_k არის ერთობლივად შე-მოსაზღვრული, ე.ი. არსებობს მუდმივები M_1,M_2 და M_3 (n-ისგან დამოუკიდებელი) რომ

$$\left\|\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|\leq M_1,\quad \|Au_k\|\leq M_2,\quad \left\|A^{1/2}u_k\right\|\leq M_3,\quad k=1,...,n.$$

თეორემა 2.2.2 თუ (2.1), (2.2) ამოცანას ამონახსნი აქვს, მაშინ სამართლიანია მიახლოებითი ცდომილობის შემდეგი შეფასება

$$\|z_{k+1}\|\leq\exp\left(ct_{k-1}\right)\left(\gamma_0\left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\|+\gamma_1\left\|z_0\right\|+\Theta_k(\tau)\right)\ ,\quad z_k=v_k-u(t_k), \tag{2.13}$$

სადაც $\Delta z_0=z_1-z_0$, $c=\nu^{-1/2}a$, $\nu=\min_{1\leq j\leq m}\left(\alpha_j\right)$, $\gamma_0=\nu^{-1/2}+c\tau^2$, $\gamma_1=1+\sqrt{2}+c\tau$,

$$\Theta_k(\tau)=\tau^2\textstyle\sum_{i=1}^k[c_1\|Au(t_i)\|+c_3\|\widetilde{f}(t_i)\|]+$$

$$+\tau\textstyle\sum_{i=1}^k[c_1J_i(t_{i-1},A^{1/2}u)+c_2J_i(t_{i+1},\ A^{1/2}u)]+$$

$$+c_2\textstyle\sum_{i=1}^k\int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}}[J_i(t,\ A^{1/2}u)+J_i(t,\ A^{-1/2}\widetilde{f})]dt\ ,$$

და სადაც

$$J_i(t,u)=\|u(t_i)-u(t)\|,\quad \widetilde{f}(t)=f(t)-M(u(t)),$$

$$c_1=\textstyle\sum_{j=1}^m\eta_j^{-3/2}(\eta_j^{-1}a_j+1),\quad a_j=\|A_jA^{-1}\|<\infty$$

$$c_2=m+c_0\ ,\quad c_0=\textstyle\sum_{j=1}^m\eta_j^{-1/2}a_j\ ,\quad c_3=\eta_1^{-1/2}+m+c_0$$

. **შედეგი 2.2.1.** თუ $f(t)$ და $A^{1/2}u(t)$ ფუნქციები $[0,\ T]$ -ზე უწყვეტია ჰელდერის აზრით λ $(0 < \lambda \leq 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\|u(t_k) - v_k\| \leq c\tau^{\lambda}, \quad c = const > 0.$$

თეორემის დასამტკიცებლად საჭირო დამხმარე ლემები და დებულებების სამართლიანობა ნაჩვენები გვაქვს უკვე წრფივი შემთხვევის განხილვისას.

2.3 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება

ამ ნაწილში განვაგრძობთ თეორემა 2.1-ის დამტკიცებას, რომელიც ეხება მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასებას:

$$z_{k+1} = B^k U_k(B) z_1 - B^{k+1} U_{k-1}(B) z_0 + \sum_{i=1}^{k} B^{k-i} U_{k-i}(B) r_i \ . \tag{2.14}$$

ფორმულა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$z_{k+1} = \tau B^k U_k(B) \frac{\Delta z_0}{\tau} + B^k \left(U_k(B) - B U_{k-1}(B)\right) z_0 + \sum_{i=1}^{k} B^{k-i} U_{k-i}(B) r_i \ , \tag{2.15}$$

სადაც $\Delta z_0 = z_1 - z_0$.

ცხადია, რომ $\Delta z_0/\tau$ არის მიახლოებითი ამონახსნის შესაბამისი პირველი რიგის წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგის ცდომილება $t = 0$ წერტილში,

$$\frac{\Delta z_0}{\tau} = \frac{\Delta u_0}{\tau} - \frac{\Delta u(0)}{\tau} \ , \quad \Delta u(0) = u(\tau) - u(0) \ .$$

გადავიდეთ ნორმებზე (2.15) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \|z_{k+1}\| \ \leq \ & \tau \left\|B^{k-1}\right\| \|B U_k(B)\| \left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| + \left\|B^k\right\| \|U_k(B) - B U_{k-1}(B)\| \|z_0\| + \\ & + \sum_{i=1}^{k} \left\|B^{k-i}\right\| \left\|U_{k-i}(B) \left(I - B^2\right)^{1/2}\right\| \left\|\left(I - B^2\right)^{-1/2} r_i\right\| \ . \end{aligned}$$

აქედან (1.27), (1.28) და (1.29) შეფასებების გათვალისწინებით ($\|B\| \leq 1$), მიიღება

$$\|z_{k+1}\| \leq \nu^{-1/2} \left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| + \left(1 + \sqrt{2}\right) \|z_0\| + \sum_{i=1}^{k} \left\|\left(I - B^2\right)^{-1/2} r_i\right\| \ . \tag{2.16}$$

ცხადია, გვაქვს

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(I - B^2\right)^{-1/2} r_i \right\| &= \left\| (I - S)^{-1/2} r_i \right\| \le \\
&\le \lambda_{0,i} + \lambda_{1,i} + \tau^2 \lambda_{2,i} + \lambda_{3,i} + \lambda_{4,i} \ ,
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

სადაც

$$
\begin{aligned}
\lambda_{s,i} &= \left\| (I - S)^{-1/2} r_{s,i} \right\| \ , \quad s = 0,\ 1,\ 4, \\
\lambda_{s,i} &= \left\| (I - S)^{-1/2} L r_{s,i} \right\| \ , \quad s = 2,\ 3 \ .
\end{aligned}
$$

(1.22)-is გამოყენებით მივიღებთ:

$$
\lambda_{0,i} = \left\| (I - S)^{-1/2} (S - L) \, u(t_i) \right\| \le \tau^2 c_1 \left\| A L u(t_i) \right\| \le \tau^2 c_1 \left\| A u(t_i) \right\| , \tag{2.18}
$$

$$
\lambda_{1,i} = \left\| (I - S)^{-1/2} (S - L) \left[u(t_i) - u(t_{i-1}) \right] \right\| \le
$$

$$
\le \tau^2 c_1 \left\| A L \left[u(t_i) - u(t_{i-1}) \right] \right\| \le
$$

$$
\le \tau c_1 \left\| \tau A^{1/2} L \right\| \left\| A^{1/2} \left[u(t_i) - u(t_{i-1}) \right] \right\| \le
$$

$$
\tau c_1 \left\| A^{1/2} \left[u(t_i) - u(t_{i-1}) \right] \right\| . \tag{2.19}
$$

(1.23)-ის და (1.24) გამოყენებით შესაბამისად, მიიღება:

$$
\tau^2 \lambda_{2,i} = \tau^2 \left\| (I - S)^{-1/2} L A \left[u(t_{i+1}) - u(t_i) \right] \right\| \le
$$

$$
\le \tau c_2 \left\| A^{1/2} \left[u(t_{i+1}) - u(t_i) \right] \right\| , \tag{2.20}
$$

$$
\lambda_{3,i} = \left\| (I - S)^{-1/2} L r_{3,i} \right\| \le \tau^{-1} c_2 \left\| A^{-1/2} r_{3,i} \right\| \le
$$

$$
\begin{aligned}
\le \ & \tau^{-1} c_2 \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - t) A^{-1/2} \left[u''(t) - u''(t_i) \right] dt \right\| \le \\
& + \tau^{-1} c_2 \left\| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) A^{-1/2} \left[u''(t) - u''(t_i) \right] dt \right\| \le
\end{aligned}
$$

$$\leq c_2 \int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \left\| A^{-1/2} \left[u''(t) - u''(t_i) \right] \right\| dt \, .$$

აქედან (2.1) განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \lambda_{3,i} &\leq c_2 \int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \left\| A^{1/2} \left[u(t) - u(t_i) \right] \right\| dt + \\ &\quad + c_2 \int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \left\| A^{-1/2} \left[\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(t_i) \right] \right\| dt \, . \end{aligned} \tag{2.21}$$

შევაფასოთ $\lambda_{4,i}$. $r_{4,i}$-ს მივცეთ შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} r_{4,i} &= \tau^2 \left[\psi_i - L\widetilde{f}(t_i) \right] = \tau^2 S_1 \left[f(t_i) - M(v_i) \right] - \tau^2 L\widetilde{f}(t_i) = \\ &= \tau^2 S_1 \left[f(t_i) - M(u(t_i)) \right] + \tau^2 S_1 \left[M(u(t_i)) - M(v_i) \right] - \tau^2 L\widetilde{f}(t_i) = \\ &= \tau^2 S_1 \left[M(u(t_i)) - M(v_i) \right] + \tau^2 S_1 \widetilde{f}(t_i) - \tau^2 L\widetilde{f}(t_i) = \\ &= \tau^2 S_1 \left[M(u(t_i)) - M(v_i) \right] + \tau^2 (S_1 - I)\widetilde{f}(t_i) + \tau^2 (I - L)\widetilde{f}(t_i) = \\ &= \tau^2 S_1 \left[M(u(t_i)) - M(v_i) \right] + \tau^2 (S_1 - I)\widetilde{f}(t_i) + \tau^4 AL\widetilde{f}(t_i) \, . \end{aligned} \tag{2.22}$$

აქედან გვაქვს

$$\lambda_{4,i} = \left\| (I - S)^{-1/2} r_{4,i} \right\| \leq$$

$$\leq \tau^2 \left\| (I - S)^{-1/2} S_1 \left[M(u(t_i)) - M(v_i) \right] \right\| \leq$$

$$+ \tau^2 \left\| (I - S)^{-1/2} (I - S_1) \widetilde{f}(t_i) \right\| + \tau^4 \left\| (I - S)^{-1/2} AL\widetilde{f}(t_i) \right\| . \tag{2.23}$$

თუ გამოვიყენებთ (1.25) უტოლობას, მივიღებთ:

$$\left\| (I - S)^{-1/2} S_1 h \right\| \leq \eta_1^{-1/2} \left\| (I - S_1)^{-1/2} S_1 h \right\| \leq$$

$$\eta_1^{-1/2} \left\| \left(\tau^2 \eta_1^{-1} A_1 S_1 \right)^{-1/2} S_1 h \right\| = \tau^{-1} \left\| A_1^{-1/2} S_1^{1/2} h \right\| \leq \left(\tau \sqrt{\nu} \right)^{-1} \|h\| , \tag{2.24}$$

$$\left\| (I - S)^{-1/2} (I - S_1) h \right\| \leq \eta_1^{-1/2} \left\| (I - S_1)^{1/2} h \right\| \leq \eta_1^{-1/2} \|h\| . \tag{2.25}$$

ახლა გამოვიყენოთ უტოლობა $\left\| \tau A^{1/2} L^{1/2} \right\| \leq 1$, მაშინ (1.18)-დან მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\tau^2\left\|(I-S)^{-1/2}ALf\right\| &\le \tau\left(m\left\|A^{1/2}Lf\right\|+c_0\left\|A^{1/2}L^{1/2}f\right\|\right)\\ &\le (m+c_0)\|f\|\,.\end{aligned} \tag{2.26}$$

(2.23)-დან, (2.24), (2.25) და (2.26) შეფასებების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\lambda_{4,i}\le\tau\nu^{-1/2}\left\|M(u(t_i))-M\left(v_i\right)\right\|+\tau^2c_3\left\|\widetilde{f}(t_i)\right\|. \tag{2.27}$$

სადაც $c_3=\eta_1^{-1/2}+m+c_0$.

რადგან M არაწრფივი ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, ამიტომ (2.27)-დან გვაქვს

$$\lambda_{4,i}\le\tau\nu^{-1/2}a\left\|u(t_i)-v_i\right\|+\tau^2c_3\left\|\widetilde{f}(t_i)\right\|, \tag{2.28}$$

სადაც a არის ლიფშიცის მუდმივა.

თუ (2.17)-ში ჩავსვამთ (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) და (2.28), მივიღებთ:

$$\left\|\left(I-B^2\right)^{-1/2}r_i\right\|\le\tau\nu^{-1/2}a\left\|z_i\right\|+\tau^2c_1\left\|Au(t_i)\right\|+$$

$$+\tau c_1J_i(t_{i-1},\ A^{1/2}u)+\tau c_2J_i(t_{i+1},\ A^{1/2}u)+\tau^2c_3\left\|\widetilde{f}(t_i)\right\|+$$

$$+c_2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}}\left[J_i\left(t,\ A^{1/2}u\right)+J_i\left(t,\ A^{-1/2}\widetilde{f}\right)\right]dt\,, \tag{2.29}$$

სადაც

$$J_i\left(t,u\right)=\left\|u(t_i)-u(t)\right\|.$$

(2.16)-დან (2.29)-ის გათვალისწინებით მიიღება

$$\delta_{k+1}\le c\tau\delta_k+\lambda_k\ , \tag{2.30}$$

სადაც $\delta_k=\|z_k\|$, $c=\nu^{-1/2}a$,

$$\lambda_k=\nu^{-1/2}\left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\|+\left(1+\sqrt{2}\right)\|z_0\|+\Theta_k(\tau)\ .$$

(2.30)-დან, გრონველის დისკრეტულის ანალოგის შესახებ ლემიდან, გვაქვს:

$$\delta_{k+1}\le\exp\left(ct_{k-1}\right)\left(c\tau\delta_1+\lambda_k\right)\ .$$

ცხადია აქედან

$$\delta_1 = \|z_1\| \leq \tau \left\| \frac{\Delta z_0}{\tau} \right\| + \|z_0\|$$

უტოლობის გათვალისწინებით მიიღება (2.13) შეფასება.

2.4 მიახლოებითი ამონახსნის შესაბამისი პირველი რიგის წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგის ცდომილების შეფასება

ამ პარაგრაფში წინა პარაგრაფების შედეგებზე დაყრდნობით ჩვენ მივიღებთ შეფასებებს (2.3) დეკომპოზიციის სქემის ამოხსნის შესაბამისი პირველი რიგის წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგის ცდომილებისთვის.

თეორემა 1: ვთქვათ u_k და $\overline{u}_k$ არის (2.1),(2.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება საწყის ვექტორებს (u_0, u_1, f_k) და $\left(\overline{u}_0, \overline{u}_1, \overline{f_k}\right)$, რომელთა კომპონენტები საკმარისად გლუვია. მაშინ $z_k = u_k - \overline{u}_k$-თვის შემდეგი მიახლოებები არის სამართლიანი:

$$\|Az_{k+1}\| \leq c\left(\|Az_0\| + \left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| + \tau\left\|A\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\left\|f_i - \overline{f_i}\right\|\right), \qquad (2.31)$$

$$\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| \leq c\left(\|Az_0\| + \left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| + \tau\left\|A\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\left\|f_i - \overline{f_i}\right\|\right), \qquad (2.32)$$

სადაც $k = 1, ..., n-1$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

თეორემა 2. ვთქვათ (3.1), (3.2) ამოცანას აქვს ამონახსნი აქვს და $\varphi_0 \in D(A)$. მაშინ მართებულია შეფასება

$$\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| \leq c_4\left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| + (\tau t_k)^{-1/2}\|z_0\| + \widetilde{\Theta}_k(\tau)\ , \qquad (2.33)$$

სადაც $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $c_4 = 1 + \sqrt{2}$,

$$\widetilde{\Theta}_k(\tau) = \tau\sum_{i=1}^{k}[(c_4c_5 + c_1)J_i(t_{i-1}, u'') + c_4J_i(t_{i+1}, u'') + ac_6J_i(t_{i-1}, u)] +$$

$$+\tau\sum_{i=1}^{k}[c_7J_i(t_{i-1}, f) + c_4J_i(t_{i-1}, f)] + c_4\sum_{i=1}^{k}\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} J_i(t, u'')dt + \tau a\|z_i\|\Big)$$

$$+\tau[c_1\|A\varphi_0\| + c_6(\|f(0)\| + \|M(\varphi_0)\|)],$$

და სადაც $c_6 = \eta_1^{-1/2} + m + c_0$, $c_7 = c_4 c_5 + c_1 + c_6$,

$$c_5 = \sum_{j=1}^{m} \eta_j^{-1} \left(\eta_j^{-1} + 1\right) \ , \quad J_i\left(t, u\right) = \left\| u(t_i) - u(t) \right\| \ .$$

დამტკიცება: (2.12) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$z_{k+1} - z_k = \left(R_k - R_{k-1}\right) z_1 - \left(R_{k-1} - R_{k-2}\right) B^2 z_0 + \Phi_k \ , \tag{2.34}$$

სადაც $R_k = B^k U_k(B)$,

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{k} R_{k-i} r_i - \sum_{i=1}^{k-1} R_{k-1-i} r_i \ .$$

(2.34)-ს მივცეთ შემდეგი სახე

$$\frac{\Delta z_k}{\tau} = \left(R_k - R_{k-1}\right) \frac{\Delta z_0}{\tau} + \tau^{-1} \left[R_k + B^2 R_{k-2} - \left(I + B^2\right) R_{k-1}\right] z_0 + \tau^{-1} \Phi_k , \tag{2.35}$$

სადაც $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

მარტივი გარდაქმნებით მიიღება

$$\begin{aligned} & R_k + B^2 R_{k-2} - \left(I + B^2\right) R_{k-1} = \\ = \ & B^{k-1} \left[B\left(U_k + U_{k-2}\right) - \left(I + B^2\right) U_{k-1}\right] = \\ = \ & -B^{k-1} \left(I - B^2\right) U_{k-1} \ . \end{aligned}$$

აქედან (1.28) შეფასების გათვალისწინებით გვაქვს

$$\begin{aligned} & \left\| R_k + B^2 R_{k-2} - \left(I + B^2\right) R_{k-1} \right\| \le \\ \le \ & \left\| B^{k-1} \left(I - B^2\right)^{1/2} \right\| \left\| U_{k-1} \left(I - B^2\right)^{1/2} \right\| \le \left\| B^{k-1} \left(I - B^2\right)^{1/2} \right\| \le \\ \le \ & \max_{0 \le x \le 1} \left[x^{k-1} \left(1 - x^2\right)^{1/2}\right] \le \frac{1}{\sqrt{k}} \ . \end{aligned} \tag{2.36}$$

ცხადია (1.30)-ის თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned} \left\| R_k - R_{k-1} \right\| &= \left\| B^{k-1} \left(B U_k(B) - U_{k-1}(B)\right) \right\| \le \\ &\le \left\| B^{k-1} \right\| \left\| B U_k(B) - U_{k-1}(B) \right\| \le 1 + \sqrt{2} \ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Φ_k-ს შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{k} R_{k-i}\left(r_i - r_{0,i} - \tau^2\zeta_i\right) - \sum_{i=1}^{k-1} R_{k-1-i}\left(r_i - r_{0,i} - \tau^2\zeta_i\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} R_{k-i}\left(r_{0,i} + \tau^2\zeta_i\right) - \sum_{i=1}^{k-1} R_{k-1-i}\left(r_{0,i} + \tau^2\zeta_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(R_{k-i} - R_{k-1-i}\right)\left(r_i - r_{0,i} - \tau^2\zeta_i\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} R_{k-i}\left(r_{0,i} + \tau^2\zeta_i\right) - \sum_{i=2}^{k} R_{k-i}\left(r_{0,i-1} + \tau^2\zeta_{i-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(R_{k-i} - R_{k-1-i}\right)\left(r_i - r_{0,i} - \tau^2\zeta_i\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} R_{k-i}\left[\left(r_{0,i} - r_{0,i-1}\right) + \tau^2\left(\zeta_i - \zeta_{i-1}\right)\right] + R_{k-1}\left(r_{0,0} + \tau^2\zeta_0\right) \ , \tag{2.38}$$

სადაც $R_{-1} = 0$,

$$\zeta_i = (S_1 - I)\widetilde{f}(t_i) + \tau^2 AL\widetilde{f}(t_i) \ .$$

(2.37)-ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\begin{aligned} &\left\|\left(R_{k-i} - R_{k-1-i}\right)\left(r_i - r_{0,i} - \tau^2\zeta_i\right)\right\| \leq \\ \leq \ \ & c_4\left(\|r_{1,i}\| + \tau^2\|Lr_{2,i}\| + \|Lr_{3,i}\| + \left\|r_{4,i} - \tau^2\zeta_i\right\|\right) \ . \end{aligned} \tag{2.39}$$

სადაც $c_4 = 1 + \sqrt{2}$.

(1.17) ფორმულის გამოყენებით მიიღება

$$\|r_{1,i}\| = \|(S - L)\left[u(t_i) - u(t_{i-1})\right]\| =$$

$$= \tau^2 \left\| \sum_{j=1}^{m} \eta_j^{-1}\left(I - S_j\right)\left(\eta_j^{-1}A_jA^{-1} - I\right)AL\left[u(t_i) - u(t_{i-1})\right] \right\| \leq$$

$$\leq \tau^2 c_5 \left\|A\left[u(t_i) - u(t_{i-1})\right]\right\| , \tag{2.40}$$

ცხადია $Lr_{2,i}$-თვის გვაქვს

$$\|Lr_{2,i}\| \leq \|A\left[u(t_{i+1}) - u(t_i)\right]\| . \tag{2.41}$$

(2.40) და (2.41) უტოლობებიდან (3.1) განტოლების გათვალისწინებით მიიღება

$$\begin{aligned} \|r_{1,i}\| + \tau^2 \|Lr_{2,i}\| &\le \tau^2 c_5 \left(\|u''(t_i) - u''(t_{i-1})\| + \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|\right) + \\ &+ \tau^2 \left(\|u''(t_{i+1}) - u''(t_i)\| + \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|\right) \ . \end{aligned} \tag{2.42}$$

ასევე ცხადია, რომ (2.22)-დან გამომდინარეობს

$$\left\|r_{4,i} - \tau^2 \zeta_i\right\| \le \tau^2 \left\|S_1 \left[M\left(u(t_i)\right) - M\left(v_i\right)\right]\right\| \le a\tau^2 \left\|u(t_i) - v_i\right\| . \tag{2.43}$$

$r_{3,i}$-ის წარმოდგენიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \|Lr_{3,i}\| &\le \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - t) \|u''(t) - u''(t_i)\| \, dt + \\ &+ \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \|u''(t) - u''(t_i)\| \, dt \le \\ &\le \tau \int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \|u''(t) - u''(t_i)\| \, dt \ . \end{aligned} \tag{2.44}$$

Tu (2.42), (2.43) და (2.44) უტოლობებს ჩავსვამთ (2.39)-ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\left\|\left(R_{k-i} - R_{k-1-i}\right)\left(r_i - r_{0,i} - \tau^2 \zeta_i\right)\right\| \le \\ \le\ & \tau^2 c_4 c_5 \left(\|u''(t_i) - u''(t_{i-1})\| + \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|\right) + \\ &+ \tau^2 c_4 \left(\|u''(t_{i+1}) - u''(t_i)\| + \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|\right) + \\ &+ \tau c_4 \int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \|u''(t) - u''(t_i)\| \, dt + a c_4 \tau^2 \|u(t_i) - v_i\| \ . \end{aligned} \tag{2.45}$$

(1.28) შეფასებების თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned} \|R_{k-i}\left(r_{0,i} - r_{0,i-1}\right)\| &= \left\|R_{k-i}\left(I - B^2\right)^{1/2}\left(I - B^2\right)^{-1/2}\left(r_{0,i} - r_{0,i-1}\right)\right\| \le \\ &\le \left\|U_{k-i}\left(I - B^2\right)^{1/2}\right\| \left\|\left(I - S\right)^{-1/2}\left(r_{0,i} - r_{0,i-1}\right)\right\| \le \\ &\le \left\|\left(I - S\right)^{-1/2}\left(r_{0,i} - r_{0,i-1}\right)\right\| . \end{aligned} \tag{2.46}$$

ცხადია ანალოგიურად მიიღება

$$\begin{aligned} \|R_{k-i}\left(\zeta_i - \zeta_{i-1}\right)\| &\le \left\|\left(I - S\right)^{-1/2}\left(\zeta_i - \zeta_{i-1}\right)\right\| \le \\ &\le \left\|\left(I - S\right)^{-1/2}\left(S_1 - I\right)\left(\widetilde{f}(t_i) - \widetilde{f}(t_{i-1})\right)\right\| + \\ &+ \tau^2 \left\|\left(I - S\right)^{-1/2} AL\left(\widetilde{f}(t_i) - \widetilde{f}(t_{i-1})\right)\right\| . \end{aligned} \tag{2.47}$$

თუ(2.46)-ში ჩავსვამთ $r_{0,i}$-ს გამოსახულებას ($r_{0,i} = (S-L)\,u(t_i)$) და გავითვალისწინებთ (1.22) შეფასებას, მივიღებთ

$$\|R_{k-i}\,(r_{0,i} - r_{0,i-1})\| \leq \tau^2 c_1 \,\|A\,[u(t_i) - u(t_{i-1})]\| \ . \tag{2.48}$$

ანალოგიურად გვაქვს

$$\|R_{k-1} r_{0,0}\| \leq \tau^2 c_1 \,\|Au(0)\| \ = \tau^2 c_1 \,\|A\varphi_0\| \ , \quad \varphi_0 \in D(A). \tag{2.49}$$

(2.48)-დან (3.1) განტოლების გათვალისწინებით მიიღება

$$\|R_{k-i}\,(r_{0,i} - r_{0,i-1})\| \leq \tau^2 c_1 \left(\|u''\,(t_i) - u''\,(t_{i-1})\| + \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|\right) \ . \tag{2.50}$$

თუ(2.47)-ში გავითვალისწინებთ (**??**), (1.18) და $\tau \left\|A^{1/2}L^{1/2}h\right\| \leq h$ შეფასებებს, მივიღებთ

$$\|R_{k-i}\,(\zeta_i - \zeta_{i-1})\| \leq \eta_1^{-1/2} \left\|\widetilde{f}(t_i) - \widetilde{f}(t_{i-1})\right\| +$$

$$\tau m \left\|A^{1/2}L\left(\widetilde{f}(t_i) - \widetilde{f}(t_{i-1})\right)\right\| + \tau c_0 \left\|A^{1/2}L^{1/2}\left(\widetilde{f}(t_i) - \widetilde{f}(t_{i-1})\right)\right\| \leq$$

$$\leq c_6 \left\|\widetilde{f}(t_i) - \widetilde{f}(t_{i-1})\right\| \leq c_6 \left(\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + a\,\|u(t_i) - u(t_{i-1})\|\right) \ , \tag{2.51}$$

სადაც $c_6 = \eta_1^{-1/2} + m + c_0$.

(2.51)-ის ანალოგიურად სამართლიანია უტოლობა

$$\|R_{k-1}\zeta_0\| \leq c_6 \left\|\widetilde{f}(t_0)\right\| \leq c_6 \left(\|f(0)\| + \|M(\varphi_0)\|\right) \ . \tag{2.52}$$

ცხადია (2.50) da (2.51) უტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\left\|R_{k-i}\left[(r_{0,i} - r_{0,i-1}) + \tau^2\,(\zeta_i - \zeta_{i-1})\right]\right\| \leq$$

$$\leq \tau^2 \left(c_1 \,\|u''\,(t_i) - u''\,(t_{i-1})\| + ac_6 \,\|u(t_i) - u(t_{i-1})\|\right)$$

$$+ \tau^2 (c_1 + c_6)\,\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \ . \tag{2.53}$$

თუ (2.38)-ში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ (2.45), (2.53), (2.49) და (2.52) უტოლობებს მივიღებთ

$$\|\Phi_k\| \le \tau^2 c_4 c_5 \sum_{i=1}^{k} \left(\|u''(t_i) - u''(t_{i-1})\| + \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|\right) +$$

$$+ \tau^2 c_4 \sum_{i=1}^{k} \left(\|u''(t_{i+1}) - u''(t_i)\| + \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \left(\tau c_4 \int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \|u''(t) - u''(t_i)\| \, dt + a c_4 \tau^2 \|z_i\| \right) +$$

$$+ \tau^2 \sum_{i=1}^{k} \left(c_1 \|u''(t_i) - u''(t_{i-1})\| + a c_6 \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|\right) +$$

$$+ \tau^2 (c_1 + c_6) \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| +$$

$$+ \tau^2 c_1 \|A\varphi_0\| + \tau^2 c_6 \left(\|f(0)\| + \|M(\varphi_0)\|\right)$$

ან რაც იგივეა

$$\|\Phi_k\| \le \tau^2 \sum_{i=1}^{k} [(c_4 c_5 + c_1) J_i(t_{i-1}, u'') + c_4 J_i(t_{i+1}, u'') +$$

$$+ a c_6 J_i(t_{i-1}, u)] + \tau^2 \sum_{i=1}^{k} [c_7 J_i(t_{i-1}, f) + c_4 J_i(t_{i-1}, f)] +$$

$$+ \tau c_4 \sum_{i=1}^{k} \left(\int\limits_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} J_i(t, u'') \, dt + \tau a \|z_i\| \right) +$$

$$+ \tau^2 \left[c_1 \|A\varphi_0\| + c_6 \left(\|f(0)\| + \|M(\varphi_0)\|\right)\right] , \tag{2.54}$$

სადაც $c_7 = c_4 c_5 + c_1 + c_6$.

(2.35)-დან(2.36), (2.37) და (2.54)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს(2.33).

შედეგი 2.4.1. თუ $f(t)$ და $u''(t)$ ფუნქციები $[0,\ T]$-ზე უწყვეტია ჰელდერის აზრით λ $(0 < \lambda \le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left\| u'(t_k) - \frac{v_{k+1} - v_k}{\tau} \right\| \le c\tau^{\lambda}, \quad c = const > 0. \tag{2.55}$$

შეფასება (2.55) გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან

$$
\begin{aligned}
& u'(t_k) - \frac{v_{k+1} - v_k}{\tau} \\
= \quad & \tau^{-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left[u'(t_k) - u'(t) \right] dt - \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau}
\end{aligned}
$$

(2.33)-ის გათვალისწინებით.

თავი 3

მაღალი რიგის დეკომპოზიციის სქემა ერთგვაროვანი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის

3.1 ამოცანის დასმა

განვიხილოთ კოშის ამოცანა აბსტრაქტულ-ჰიპერბოლური განტოლებისთვის ჰილბერტის სივრცეში H:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{3.1}$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = \varphi_1. \tag{3.2}$$

სადაც A არის თვითშეუღლებული (A არაა დამოკიდებული t-ზე), დადებითად განსაზღვრული (საზოგადოდ შემოუსაზღვრელი) ოპერატორი, რომლის განსაზღვრის არე $D(A)$ ყველგან მკვრივია H-ში, $\overline{D(A)} = H, \quad A = A^*$ და

$$(Au, u) \geq a \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A), \quad a = const > 0,$$

სადაც $\|\cdot\|$ და $(\cdot, \cdot)$ შესაბამისად არის ნორმა და სკალარული ნამრავლი H-ში; φ_0 და φ_1 მოცემული ვექტორებია H-დან; $u(t)$ არის უწყვეტი, ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი საძიებელი ფუნქცია მნიშვნელობებით H-ში.

როგორც ცნობილია, თუ $\varphi_0 \in D(A)$, $\varphi_1 \in D(A^{1/2})$ მაშინ არსებობს ისეთი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია $u(t)$, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას (3.1) და საწყის პირობებს (3.2) . ამ შემთხვევაში, ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$u(t) = \cos\left(tA^{1/2}\right)\varphi_0 + A^{-1/2}\sin\left(tA^{1/2}\right)\varphi_1, \tag{3.3}$$

სადაც $\cos\left(tA^{1/2}\right)$ და $\sin\left(tA^{1/2}\right)$ ოპერატორ ფუნქციები განსაზღვრულია ეილერის განზოგადებულ ფორმულებით.

ვთქვათ $A = A_1 + A_2 + ... + A_m$, სადაც $A_j \ \ (j = 1, ..., m)$ არის თვითშეუღლებული და დადებითად გასაზღვრული ოპერატორები.

განვიხილოთ შემდეგი ბადე:

$$\omega_\tau = \left\{ t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, ...n, \quad n > 1, \quad \tau = \frac{T}{n} \right\}.$$

(3.3), ფორმულიდან მიიღება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულება:

$$u(t_{k+1}) = 2\cos\left(\tau A^{1/2}\right) u(t_k) - u\left(t_{k-1}\right). \tag{3.4}$$

მომდევნო პარაგრაფში განვიხილავთ კოსინუს ოპერატორ ფუნქციის რაციონალურ გახლეჩვას და მისი საშუალებით დავამტკიცებთ თეორემას ცდომილების შეფასების შესახებ.

3.2 რაციონალური გახლეჩვა კოსინუს ოპერატორ ფუნქციისთვის

ვთქვათ H არის ჰილბერტის სივრცე და A არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული (საზოგადოდ შემოუსაზღვრელი) ოპერატორი, რომლის განსაზღვრის არე $D\left(A\right)$ ყველგან მკვრივია H.-ში. ვთქვათ $A = A_1 + A_2 + ... + A_m$, სადაც $A_j \ \ (j = 1, ..., m)$ არის დადებითად განსაზღვრული და თვითშეუღლებული ოპერატორები. ჩვენი მიაზანია $\cos\left(\tau A^{1/2}\right), \tau > 0$ ოპერატორ ფუნქციებისთვის მაღალი რიგის სიზუსტის რაციონალური გახლეჩვის ფორმულის აგება.

როგორც ცნობილია, $\cos\left(tA^{1/2}\right)$ ოპერატორ ფუნქცია ოპერატორი, განსაზღვრული ეილერის განზოგადოებული ფორმულით:

$$\cos\left(tA^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-it\sqrt{A}} + e^{it\sqrt{A}}\right), \tag{3.5}$$

სადაც $\left\{e^{\pm it\sqrt{A}}\right\}$ არის უნიტარული ჯგუფი ოპერატორებისა, რომლებიც წარმოქმნილია $\left(\pm iA^{1/2}\right)$ ოპერატორებით.

მტკიცდება, რომ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\left(I \pm \frac{t}{n} iA^{1/2}\right)^{-n}\varphi$ (I არის ერთეულოვანი ოპერატორი), ყოველი $\varphi \in H$-თვის და ეს ზღვარი არის შემდეგი $e^{\pm it\sqrt{A}}\varphi$.

განვიხილოთ შემდეგი რაციონალური გახლეჩა:

$$\begin{aligned} V(\tau) &= \frac{1}{m+2}\left[V_0(\tau;A_1,...,A_m)+V_0(\tau;A_m,...,A_1)+\right. \\ &\left.+\sum_{j=1}^{m}\left(I+\lambda\tau^2A_j\right)^{-1}\right], \\ V_0(\tau;A_1,...,A_m) &= \left(I+\alpha\tau^2A_1\right)^{-1}...\left(I+\alpha\tau^2A_m\right)^{-1}\times \\ &\times\left(I+\overline{\alpha}\tau^2A_m\right)^{-1}...\left(I+\overline{\alpha}\tau^2A_1\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

სადაც $\lambda=\frac{m+2}{2}-\frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{6}}$, $\alpha=\frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}}\pm i\sqrt{\frac{m+2}{96}+\frac{\lambda^2}{2}}$, $\overline{\alpha}$ არის α-ს შეუღლებული.

ვაჩვენოთ, რომ (3.6) ფორმულა გვაძლევს კოსინუს ოპერატორ ფუნქციის გახლეჩას ლოკალურად მეექვსე რიგის სიზუსტით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_A &= \|A_1\varphi\|+...+\|A_m\varphi\|, \quad \varphi\in D(A), \\ \|\varphi\|_{A^2} &= \sum_{i,j=1}^{m}\|A_iA_j\varphi\|, \quad \varphi\in D\left(A^2\right). \end{aligned}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $\|\varphi\|_{A^k}$ $(k>2)$.

(3.5) ფორმულის თანახმად კოსინუს ოპერატორ ფუნქციისთვის მართებულია შემდეგი გაშლა:

$$\cos\left(\tau A^{1/2}\right)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{\tau^{2i}}{(2i)!}A^i+R_k(\tau,A), \tag{3.7}$$

სადაც $R_k(\tau,A)$ არის ნაშთითი წევრი, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_k(\tau,A)\varphi\|\le\frac{1}{(2k+2)!}\tau^{2k+2}\|\varphi\|_{A^{k+1}}, \quad \varphi\in D\left(A^{k+1}\right). \tag{3.8}$$

ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ გაშლას:

$$\left(I+\tau^2A\right)^{-1}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tau^{2i}A^i+\widetilde{R}_k(\tau,A), \tag{3.9}$$

სადაც

$$\widetilde{R}_k(\tau,A)=(-1)^{k+1}\tau^{2k+2}\left(I+\tau^2A\right)^{-1}A^{k+1}. \tag{3.10}$$

ცხადია, რომ $\widetilde{R}_k(\tau,A)$ ნაშთითი წევრისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება :

$$\left\|\widetilde{R}_k(\tau,A)\varphi\right\|\le\tau^{2k+2}\|\varphi\|_{A^{k+1}}, \quad \varphi\in D\left(A^{k+1}\right). \tag{3.11}$$

ჩვენ გავშლით $V(\tau)$ ოპერატორს მარჯვნიდან მარცხნივ (3.9) ფორმულის გამოყე-

ნებით ისე, რომ ნაშთითი წევრი იყოს მეექვსე რიგის τ-ს მიმართ. გვაქვს::

$$\begin{aligned} V(\tau) &= \frac{1}{m+2}\left[V_0(\tau; A_1,...,A_m) + V_0(\tau; A_m,...,A_1) + \sum_{j=1}^{m}\left(I+\lambda\tau^2 A_j\right)^{-1}\right] = \\ &= \frac{1}{m+2}\left[(m+2)\, I + \tau^2 \sum_{i=1}^{m}\left(2\left(\alpha+\overline{\alpha}\right)+\lambda\right) A_i + \right. \\ &\left. +\tau^4\left(\sum_{i=1}^{m}\left(2\left(\alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2\right)+\lambda^2\right) A_i^2 + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{m}\left(\alpha+\overline{\alpha}\right)^2 A_i A_j\right)\right] \\ &+\widetilde{R}(\tau), \end{aligned} \tag{3.12}$$

სადაც $\widetilde{R}(\tau)$-თვის (3.11)-ის თანახმად მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\left\|\widetilde{R}(\tau)\varphi\right\| \leq c\tau^6 \|\varphi\|_{A^3}, \quad \varphi \in D\left(A^3\right). \tag{3.13}$$

$\alpha, \overline{\alpha}$ და λ პარამეტრები აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{aligned} 2\left(\alpha+\overline{\alpha}\right)+\lambda &= \frac{m+2}{2}, \\ 2\left(\alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2\right)+\lambda^2 &= \frac{m+2}{24}, \\ \left(\alpha+\overline{\alpha}\right)^2 &= \frac{m+2}{24}. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ტოლობებს, მაშინ (3.12)-დან მივიღებთ:

$$V(\tau) = I - \frac{\tau^2}{2}A + \frac{\tau^4}{24}A^2 + \widetilde{R}(\tau). \tag{3.14}$$

(3.7)-ის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\cos\left(\tau A^{1/2}\right) = I - \frac{\tau^2}{2}A + \frac{\tau^4}{24}A^2 + R_2(\tau, A). \tag{3.15}$$

(3.14) და (3.15) ტოლობებიდან, (3.8) და (3.13) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left\|\left(\cos\left(\tau A^{1/2}\right) - V(\tau)\right)\varphi\right\| \leq c\tau^6 \|\varphi\|_{A^3}, \quad \varphi \in D\left(A^3\right). \tag{3.16}$$

(1.4)-ში კოსინუს ოპერატორ ფუნქციის შე ცვლით რაციონალური გახლეჩით,მივიღებთ შემდეგ დეკომპოზიციის სქემას:

$$u_{k+1} = 2V(\tau)\, u_k - u_{k-1}, \quad k = 1,...,n-1, \tag{3.17}$$

სადაც

$$u_0 = \varphi_0, \quad u_1 = V(\tau)\varphi_0 + \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)\varphi_1. \tag{3.18}$$

u_k ფუნქციას ვაცხადებთ $u(t)$-ის მიახლოებად $t = t_k$ წერტილში.

3.3 თეორემა მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასების შესახებ

სამართლიანია შემდეგი თეორემა (ქვევით ყველგან c არის დადებითი მუდმივა).

თეორემა: ვთქვათ სრულდება შემდეგი პირობები:

(ა) $\lambda = \frac{m+2}{2} - \frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{6}}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}} \pm i\sqrt{\frac{m+2}{96} + \frac{\lambda^2}{2}}$;

(ბ) $A,\ A_j\ \ (j = 1, ..., m)$ არის თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული (საზოგადოდ შემოუსაზღვრელი) ოპერატორები;

(გ) $\varphi_0 \in D\left(A^3\right),\ \varphi_1 \in D\left(A^{2+1/2}\right);$

მაშინ (3.1)-(3.2) სქემით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|u(t_k) - u_k\| \leq c\nu\tau^4 \left(\|\varphi_1\|_{A^2} + \tau \|\varphi_0\|_{A^3} + t_k \max_{1\leq i\leq k} \|u\left(t_i\right)\|_{A^3} \right),$$

სადაც $\nu = \left(1 + \tau^2\nu_0\right)/\sqrt{\nu_0}$, ν_0 არის $A_j\ (j = 1, ..., m)$. ოპერატორების ქვედა ზღვრების მინიმუმი.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ თუ $\varphi_0 \in D\left(A^3\right)$ და $\varphi_1 \in D\left(A^{2+1/2}\right)$, მაშინ (3.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $u\left(t\right) \in D\left(A^3\right)$ ყოველი $t \in [0, T]$-თვის.

აღვნიშნოთ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილობა $t = t_k$ წერტილში z_k-ით, $z_k = u\left(t_k\right) - u_k$. (3.4) და (3.17) ფორმულების გამოყენებით გვაქვს:

$$z_{k+1} = 2V\left(\tau\right) z_k - z_{k-1} + 2R\left(\tau\right) u\left(t_k\right), \tag{3.19}$$

სადაც

$$R\left(\tau\right) = \cos\left(\tau A^{1/2}\right) - V\left(\tau\right). \tag{3.20}$$

(3.19)-დან ინდუქციით მიიღება:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \widetilde{U}_k\left(L\right) z_1 - \widetilde{U}_{k-1}\left(L\right) z_0 + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{U}_{k-i}\left(L\right) R\left(\tau\right) u\left(t_i\right) = \\ &= \widetilde{U}_{k-i}\left(L\right) z_1 + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{U}_{k-i}\left(L\right) R\left(\tau\right) u\left(t_i\right), \quad L = 2V\left(\tau\right), \end{aligned} \tag{3.21}$$

სადაც $\widetilde{U}_k(L)$ ოპერატორ-პოლინომები აკმაყოფიებენ შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_k(L) &= L\widetilde{U}_{k-1}(L) - \widetilde{U}_{k-2}(L), \\ \widetilde{U}_0(L) &= I, \quad \widetilde{U}_{-1}(L) = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

განვიხილოთ $\widetilde{U}_k(L)$ ოპერატორ-პოლინომის შესაბამისი სკალარული პოლინომი $\widetilde{U}_k(x)$. მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ $U_k(x) = \widetilde{U}_k(2x)$ პოლინომები წარმოადგენს ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომებს, რომელთათვისაც მართებულია წარმოდგენა:

$$U_k(x) = \frac{\sin\left((k+1)\arccos x\right)}{\sin\left(\arccos x\right)}, \quad x \in]-1,1[.$$

ამ ფორმულის გამოყენებით მიიღება:

$$\widetilde{U}_k(x) = \frac{\sin\left((k+1)\arccos \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\arccos \frac{x}{2}\right)}, \quad x \in]-2,2[. \tag{3.23}$$

აქედან კი გამომდინარეობს $]-1,1[$ შუალედში ჩებიშევის კლასიკური პოლინომებისთვის შემდეგი შეფასება:

$$\left|\widetilde{U}_k(x)\right| \le \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in]-2,2[. \tag{3.24}$$

შევაფასოთ $\left(I + \alpha\tau^2 A_i\right)^{-1}$ ოპერატორის ნორმა. რადგან, A_i თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორებია, გვაქვს:

$$\begin{aligned}\left\|\left(I + \alpha\tau^2 A_i\right)^{-1}\right\| &= \sup_{x\in[\nu_0,+\infty)} \frac{1}{|1+\alpha\tau^2 x|} \le \\ &\le \left(1 + \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}}\tau^2\nu_0\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\left\|\left(I + \overline{\alpha}\tau^2 A_i\right)^{-1}\right\| \le \left(1 + \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}}\tau^2\nu_0\right)^{-1}, \tag{3.26}$$

$$\left\|\left(I + \lambda\tau^2 A_i\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1+\lambda\tau^2\nu_0} \le \frac{1}{1+\tau^2\nu_0}. \tag{3.27}$$

(3.25) და (3.26)-დან გვაქვს:

$$\begin{aligned}\left\|V_0\left(\tau; A_1, ..., A_m\right)\right\| &\le \left(1 + \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}}\tau^2\nu_0\right)^{-2m} \le \left(1 + \frac{m\sqrt{m+2}}{2\sqrt{6}}\tau^2\nu_0\right)^{-1} \le \\ &\le \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\tau^2\nu_0\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\left\|V_0\left(\tau; A_m, ..., A_1\right)\right\| \le \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\tau^2\nu_0\right)^{-1}. \tag{3.29}$$

(3.28) და (3.29)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\|L\| \le \frac{2}{m+2}\left(\frac{2}{1+\frac{\sqrt{6}}{3}\tau^2\nu_0} + \frac{m}{1+\tau^2\nu_0}\right) \le \frac{2}{1+\frac{\sqrt{6}}{3}\tau^2\nu_0}. \tag{3.30}$$

რადგან L არის თვითშეუღლებული ოპერატორი , მაშინ (3.30)-დან მიიღება:

$$Sp\left(L\right) \subset \left[-\nu_1, \nu_1\right], \tag{3.31}$$

სადაც $\nu_1 = 2/\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\tau^2\nu_0\right)$.

ახლა შევაფასოთ $\tau\widetilde{U}_k\left(L\right)$ ოპერატორის ნორმა. როგორც ცნობილია, თუ არგუმენ-ტი არის თვითშეუღლებელი შემოსაზღვრული ოპერატორი, მაშინ ოპერატორული პო-ლინომის ნორმა ექვივალენტურია შესაბამისი სკალარული პოლინომის C-ნორმისა სპექტრში. ამ ფაქტის გამოყენებით (3.24)-დან, (3.31)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \tau\left\|\widetilde{U}_k\left(L\right)\right\| &= \tau \max_{x\in Sp(L)}\left|\widetilde{U}_k\left(x\right)\right| \leq \tau \max_{x\in[-\nu_1,\nu_1]}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{2\tau}{\sqrt{4-\nu_1^2}} \leq \nu. \end{aligned} \tag{3.32}$$

z_1-თვის გვაქვს:

$$z_1 = u\left(t_1\right) - u_1 = R\left(\tau\right)\varphi_0 + \left(A^{-1/2}\sin\left(\tau A^{1/2}\right) - \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)\right)\varphi_1. \tag{3.33}$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\left\|\left(A^{-1/2}\sin\left(\tau A^{1/2}\right) - \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)\right)\varphi_1\right\| \leq c\tau^5\left\|\varphi_1\right\|_{A^2}, \quad \varphi \in D\left(A^2\right). \tag{3.34}$$

(3.33)-დან, (3.16) და (3.34)-ის გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$\left\|z_1\right\| \leq c\tau^5\left(\left\|\varphi_1\right\|_{A^2} + \tau\left\|\varphi_0\right\|_{A^3}\right). \tag{3.35}$$

(3.21) ფორმულიდან, (3.16), (3.35) და (3.32) უტოლობების გამოყენებით თეორემა დამტკიცებულია.

დასკვნა

ჰილბერტის სივრცეში განვიხილეთ კოშის ამოცანა აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის. განტოლების ელიფსური ნაწილის შესაბამისი A ოპერატორი წარმოადგენს ჯამს $A_1, A_2, ..., A_m$ თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული-ოპერატორებისა. ავაგეთ დასმული ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის სქემა. ამ სქემის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ ყოველ ლოკალურ შუალედში პარალელურად იხსნება (ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად) კლასიკური სხვაობიანი ამოცანები, შესაბამისად $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$ ოპერატორებით. მიღებული ამონახსნებისგან შედგენილი აწონილი საშუალო ცხადდება მიახლოებით ამონახსნად ლოკალური შუალედის მარჯვენა ბოლოში.

დამტკიცებულია შემოთავაზებული სქემის კრებადობა და შეფასებულია, როგორც მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება, ასევე პირველი რიგის წარმოებულის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგის ცდომილობა, იმ შემთხვევისთვის, როცა საწყისი ამოცანის მონაცემები აკმაყოფილებს ბუნებრივ საკმარის პირობებს ამონახსნის არსებობისთვის. აგებულია ტესტური ამოცანა შემოთავაზებული სქემის რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმის განსახილველად.

ნაშრომში ასევე განვიხილეთ ერთგვაროვანი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის მაღალი რიგის დეკომპოზიციის სქემა, რომელიც აგებულია კოსინუს ოპერატორ ფუნქციისთვის რაციონალური აპროქსიმაციის საფუძველზე. წინა თავებში დამუშავებული მეთოდიკის გამოყენებით შეფასებულია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილობა.

ლიტერატურა

[1] L. A. Bales, Semidiscrete steps method of solving for multi-dimensional and single step fully discrete finite element approximations for second order hyperbolic equations with nonsmooth solutions. *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.* 27 (1993), no. 1, 55–63.

[2] G. A. Baker, T. A. Oliphant, An implicit, numerical method for solving the two-dimensional heat equation, Quart. Appl. Math., 17 (1959/1960), no. 4, pp. 361-373.

[3] G. Birkhoff, R. S. Varga, Implicit alternating direction methods, Trans. Amer. Math. Soc., 92 (1959), No. 1, pp. 13-24.

[4] G. Birkhoff, R. S. Varga, D. Young, Alternating direction implicit methods, Advances in Computers., Academic Press, New York, 3 (1962), pp. 189-273.

[5] E. G. Diakonov, Difference schemes with splitting operator for higher-dimensional non-stationary problems, SSSR. Comput. Math. Math. Phys., 2 (1962), No. 4, pp. 549-568.

[6] J. Douglas, On numerical integration of by impilicit methods, SIAM, 9 (1955), No. 1, pp. 42-65.

[7] J. Douglas, H. Rachford, On the numerical solution of heat condition problems in two and three space variables, Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1956), No. 2, pp. 421-439.

[8] D. G. Gordeziani, On application of local one-dimensional method for solving parabolic type multi-dimensional problems of 2m-degree, Proceeding of Science Academy of GSSR, 3 (1965), no. 39, pp. 535-542.

[9] D. G. Gordeziani, A certain economical difference method for the solution of a multidimensional equation of hyperbolic type. (Russian) Gamoqeneb. Math. Inst. Sem. Mo sen. Anotacie. No. 4 (1971), pp. 11–14.

[10] D.G. Gordeziani, H.V. Meladze, On modeling of third boundary value problem

for the multi-dimensional parabolic equations of arbitrary area by the one-dimensional equations, Comput. Math. Math. Phys., 14 (1974), no. 1, pp. 246-250.

[11] D. G. Gordeziani, A. A. Samarskii, Some problems of plates and shells thermo elasticity and method of summary approximation, Complex analysis and it's applications (1978), pp. 173-186.

[12] N. N. Ianenko, On Economic Implicit Schemes (Fractional steps method), Dokl. Akad. Nauk SSSR., 134 (1960), No. 5, pp. 84-86.

[13] N. N. Ianenko, Fractional steps method of solving for multi-dimensional problems of mathematical physics, Novosibirsk, Nauka, 1967.

[14] V. P. Ilin, On the splitting of difference parabolic and elliptic equations, Sibirsk. Mat. Zh, 6 (1965), No. 1, pp.
1425-1428.

[15] T. Kato, The theory perturbations of linear
operators, M.: Mir, 1972, 740 p.

[16] S.G. Krein, Linear differential equations in Banach space. *M.: Nauka* 1967, 464 p.

[17] A. N. Konovalov, The fractional step method for solving the Cauchy problem for an n-dimensional oscillation equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR., 147 (1962), No. 1, pp. 25-27.

[18] A. M. Kuzyk, V. L. Makarov, Estimation of an exactitude of summarized approximation of a solution of Cauchy abstract problem, Dokl. Akad. Nauk USSR, 275 (1984), No. 2, pp. 297-301.

[19] V. L. Makarov, {{Ortogonalnie mnogochleni i raznostnie sxemi s tochnimi i iavnimi cpektrami. Doktorckaia dissertaciia fiz.-mat. nauk. - Kiev, 1974, - 286 s.

[20] G. I. Marchuk, Split methods, M.: Nauka, 1988.

[21] G. I. Marchuk, N. N. Ianenko, The solution of a multi-dimensional kinetic equation by the splitting method, Dokl. Akad. Nauk SSSR., 157 (1964), No. 6, pp. 1291-1292.

[22] G. I. Marchuk, U. M. Sultangazin, On a proof of the splitting method for the equation of radiation transfer , SSSR. Comput. Math. Math. Phys., 5 (1965), No. 5, pp. 852-863.

[23] A. G. Morris, T. S. Horner, Chebyshev polynomials in the numerical solution of differential equations. Math. Comput., 1977, Vol. 31, no. 140, pp. 881-891.

[24] V. A. Novikov, G. V. Demidov, A remark on a certain method of constructing schemes of high accuracy. (Russian) Čisl. Metody Meh. Splošnoi Sredy, Vol. 3 (1972), no. 4, 89–91.

[25] D. Peaceman, H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, SIAM, 3 (1955), No. 1, pp. 28-41.

[26] M. Read, B. Simon, Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Second edition. *Academic Press, Inc, New York*, 1980, 400 p.

[27] V. A. Rastrenin, The application of a certain difference method to abstract hyperbolic equations. (Russian) Differencialnye Uravnenija, 1973, Vol. IX, no. 12, pp. 2222-2226.

[28] D. L. Rogava, An averaged semidiscrete scheme of summary approximation for an abstract hyperbolic equation. (Russian) Current problems in mathematical physics, Vol. I (Russian) Tbilisi, 1987, 338–348, 491–492, Tbilis. Gos. Univ., Tbilisi, 1987.

[29] J. Rogava, The study of the stability of semi-discrete scheme by means of Chebyshev orthogonal polynomials, *GSSR Mecn. Akad. Moambe,* vol. 83, no. 3, 1976, pp. 545-548.

[30] J. Rogava, Semidiscrete schemes for operator-differential equations *Izdatelstvo "Tekhnicheskogo Universiteta"*, 1995, 288 p.

[31] A. A. Samarskii, On an economical difference method for the solution of a multi-dimensional parabolic equation in an arbitrary region, SSSR. Comput. Math. Math. Phys., 2 (1962), No. 5, pp. 787-811.

[32] A. A. Samarskii, Locally homogeneous difference schemes for higher-dimensional equations of hyperbolic type in an arbitrary region., SSSR. Comput. Math. Math. Phys., 4 (1962), pp. 638-648.

[33] A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich, Additive schemes for mathematical physics problems, M., Nauka, 1999.

[34] S. Szego, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, 1959, 421 pp.