ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

IVANE JAVAKHISHVILI
TBILISI STATE UNIVERSITY

აარონოვ-ბომის ეფექტი და ტალღური ფუნქციის ფაზის ინტეგრებადობა

სტუდენტი: გიორგი ქისტაური

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი - ფიზიკის მიმართულება

ელემენტარული ნაწილაკებისა და კვანტური ველების კათედრა

ხელმძღვანელები: სრული პროფესორი მერაბ ელიაშვილი

ასოცირებული პროფესორი გიორგი ციციშვილი

თბილისი

2018 წელი

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია აარონოვ-ბომის ეფექტის თეორიული შინაარსი. ასევე ხაზგასმულია ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალის განსაკუთრებული მნიშვნელობა. გაანალიზებულია ყალიბური გარდაქმნის შესაბამისი ფაზის ინტეგრებადობის საკითხი.

დასაწყისში კლასიკურადაა განხილული დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა ელექტრომაგნიტურ ველში, მოძრაობის განტოლებები და ყალიბური გარდაქმნები, შემდგომ კვანტურ მექანიკასა და მის ძირითად პრინციპებზე დაყრდნობით ტალღური ფუნქციის ყალიბური გარდაქმნა, შესაბამისი დამატებითი ფაზა და მისი ინტეგრებადობის საკითხი.

ძირითადი ნაწილი კი ეხება განსაკუთრებულ კვანტურ ეფექტს, რომელიც აღიწერა პირველად აარონოვის და ბომის მიერ. AB-ეფექტში ცხადად ჩანს ვექტორ პოტენციალის ფიზიკური არსი, მისი გავლენა ელექტრონზე დამის ენერგიაზე. საბოლოოდ კი განხილულია ამ ამოცანის შესაბამისი გეომეტრიული ფაზა.

შესავალი

მეოცე საკუნეში კვანტურ მექანიკის ჩამოყალიბებასა განვითარებასთან ერთად დაისვა ერთი საკითხი: ელექტრომაგნიტური ველი აღიწერება მაქსველის განტოლებებით, სადაც ელექტრული და მაგნიტური ველები ფიზიკურად დამზერადი სიდიდეებია, ხოლო ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალები - არა. კვანტური მექანიკის განტოლებებში კი სწორედ ეს პოტენციალები გვხვდება. სწორედ ამ მიზეზით 1959 წელს აარონოვმა და ბომმა ივარაუდეს, რომ პოტენციალსაც შეიძლება გააჩნდეს გარკვეულ შემთხევაში ფიზიკური არსი და დაამუშავეს შესაბამისი ექსპერიმენტის მოდელიც, რომლის მიხედვითაც ელექტრონის ტალღური ფუნქცია იძენდა დამატებით ფაზას, რომელიც უშუალოდ დაკავშირებული იყო ვექტორ პოტენციალთან და არა ელექტრომაგნიტურ ველთან. ნაშრომის მთავარ თემას სწორედ აარონოვ-ბომის ეფექტის ანალიზი წარმოადგენს.

უპირველეს ყოვლისა უნდა განვიხილოთ სწორედ ყალიბური გარდაქმნები - ელექტრომაგნიტური პოტენციალების განსაკუთრებული ბუნება, რომელიც მანამდე სუფთა მათემატიკურ თავისებურებად აღიქმებოდა თუმცა სწორედ მისი საშუალებითაც აიხსნება კვანტურ მექანიკაში ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევა. ასევე შევისწავლოთ ტალღური ფუნქციის ფაზის ინტეგრებადობის საკითხი, რასაც მივყავართ სწორედ აარონოვ-ბომის ეფექტამდე.

დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა ელექტრომაგნიტურ ველში.

ნაწილაკზე მოქმედი ლორენცის ძალა

$$\mathbf{F} = \mathrm{q}\mathbf{E} + \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

მიიღება ლაგრანჟიანიდან:

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathbf{v}^2 - \mathrm{q}\Phi(\mathbf{r},\mathrm{t}) + \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},\mathrm{t})$$

კერძოდ, ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებით საბოლოოდ ვიღებთ:

$$m\ddot{x}_i = +q\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\dot{x}_n \varepsilon_{ink} B_k$$

$$m\ddot{x}_i = qE_i + q\varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k$$

სადაც

$$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$B_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kml}F_{ml}$$

ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი $F_{in} = \varepsilon_{ink}B_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ink}\varepsilon_{kml}F_{ml}$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

შესაბამისად

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla}\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\, \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

ყალიბური გარდაქმნები

ელექტრული და მაგნიტური ველი ფიზიკურად დამზერადი სიდიდეებია, განსხვავებით ვექტორული და სკალარული პოტენციალებისგან. ამიტომ შეგვიძლია პოტენციალების ყალიბურად გარდაქმნდა, კერძოდ:

მაქსველის განტოლებებით პოტენციალები $(\Phi, \boldsymbol{A})$გვაძლევენ იმავე $\boldsymbol{E}$და$\boldsymbol{B}$ ველებს, რასაც

$$\Phi'(t,\boldsymbol{r}) = \Phi(t,\boldsymbol{r}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda(t,\boldsymbol{r})}{\partial t}; \quad \boldsymbol{A}'(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(t,r) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(t,\boldsymbol{r})$$

სადაც $\Lambda(t,\boldsymbol{r})$ - $t,\boldsymbol{r}$- დამოკიდებული ნებისმიერი ფუნქციაა რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრე პირობებს უსასრულობაში. ასეთ შემთხვევაში:

$$\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$$

ხოლო ლაგრანჟიანი არაა ყალიბურად ინვარიანტული

$$L \rightarrow L' = L + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial \Lambda(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} + \dot{x}_n \frac{\partial \Lambda}{\partial x_n}\right] = L + \frac{q}{c}\frac{d\Lambda}{dt}$$

მაგრამ გვაძლევს იმავე დინამიკურ განტოლებებს.

რაც შეეხება ჰამილტონიანს და ჰამილტონის განტოლებებს:

კანონიკური იმპულსი

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(t,\boldsymbol{x})$$

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m}\left[p_i - \frac{q}{c}A_i(t,\boldsymbol{x})\right]$$

აღვნიშნოთ, რომ კანონიკური იმპულსი განსხვავებულია კინეტიკური იმპულსისაგან:

$$p_i \neq m\dot{x}_i = \left[p_i - \frac{q}{c}A_i(t,\boldsymbol{x})\right] = \pi_i$$

მაშინ ჰამილტონიანი შემდეგი სახისაა:

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\right]^2 + q\Phi(t,\boldsymbol{x})$$

ჰამილტონის განტოლებებით კი ვიღებთ:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{1}{m}\left[p_i - \frac{q}{c}A_i(t,\boldsymbol{x})\right]$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{q}{mc}\left[p_k - \frac{q}{c}A_k(t,\boldsymbol{x})\right]\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - q\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

ყალიბური გარდაქმნა კვანტურ მექანიკაში.

კვანტურ მექანიკაში ნაწილაკის მოძრაობა აღიწერება შრედინგერის განტოლებით

$$\left(\frac{1}{2m}\left[-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\right]^2+q\Phi(t,\boldsymbol{x})\right)\psi(t,\boldsymbol{x})=i\hbar\frac{\partial\psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\right)^2\psi(t,\boldsymbol{x})=i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{q}{\hbar}\Phi\right)\psi(t,\boldsymbol{x})$$

განვმარტოთ კოვარიანტული წარმოებულები

$$\boldsymbol{D}\equiv\boldsymbol{\nabla}-i\frac{q}{c\hbar}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})$$

$$D_t\equiv\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{q}{\hbar}\Phi$$

მაშინ შრედინგერის განტოლება იღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{1}{2m}[-i\hbar\boldsymbol{D}]^2\psi(t,\boldsymbol{x})=i\hbar D_t\psi(t,\boldsymbol{x})$$

ყალიბური გარდაქმნებით ვიღებთ

$$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{A}'(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}\Lambda(t,\boldsymbol{x})$$

$$\Phi(t,\boldsymbol{x})\to\Phi'(t,\boldsymbol{x})=\Phi(t,\boldsymbol{x})-\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}$$

$$\psi(t,\boldsymbol{x})\to\psi'(t,\boldsymbol{x})=exp\left(i\frac{q}{\hbar c}\right)\psi(t,\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{D}\psi(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{D}'\psi(t,\boldsymbol{x})\psi'(t,\boldsymbol{x})=exp\left(i\frac{q}{\hbar c}\right)\boldsymbol{D}\psi(t,\boldsymbol{x})$$

$$D_t\psi(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})\to D'_t\psi(t,\boldsymbol{x})\psi'(t,\boldsymbol{x})=exp\left(i\frac{q}{\hbar c}\right)D_t\psi(t,\boldsymbol{x})$$

შრედინგერის განტოლება ყალიბური გარდაქმნების მიმართ კოვარიანტულია

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}'(t,\boldsymbol{x})\right)^2+q\Phi'(t,\boldsymbol{x})\right]\psi'(t,\boldsymbol{x})=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'(t,\boldsymbol{x})$$

სადაც ტალღური ფუნქციები$\psi(t,\boldsymbol{x})$ და $\psi'(t,\boldsymbol{x})$უნდა აღწერდეს ერთსა და იმავე ფიზიკას.

კვანტური მექანიკის თანახმად ალბათობის სიმკვრივე

$$\psi^{*\prime}(t,\boldsymbol{x})\psi'(t,\boldsymbol{x})=\psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})=\rho(t,\boldsymbol{x})$$

ხოლო ალბათობის დენის სიმკვრივე

$$\boldsymbol{j}_{(\boldsymbol{0})} = \frac{i\hbar}{2m}[\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\psi]$$

თუ

$$\Phi = 0, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

შრედინგერის განტოლებიგან გამომდინარე ვიღებთ უწყვეტობის განტოლებას

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}_{(\boldsymbol{0})}$$

თუმცა ნულისგან განსხვავებული ელექტრომაგნიტური ველისთვის

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{J}$$

სადაც

$$\boldsymbol{J} = \frac{i\hbar}{2m}[\psi^*\boldsymbol{D}\psi - \boldsymbol{D}\psi^*\psi] = \boldsymbol{j}_{(\boldsymbol{0})} + \frac{q}{mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi$$

ყალიბური გარდაქმნების მიმართ ალბათობის სიმკვრივე და დენის სიმკვირვე ინვარიანტულია

$$\rho \to \rho' = \rho$$

$$\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J}$$

შესაბამისად ვიღებთ ყალიბურად კოვარიანტულ უწყვეტობის განტოლებას.

$$D_i J_i = D_t \rho$$

ტალღური ფუნქციის არაინტეგრებადი ფაზა
ვექტორ პოტენციალი

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} f$$

არ გვაძლევს ნულისგან განსხვავებულ მაგნიტურ ველს

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f = 0$$

თუ f ფუნქციას არ აქვს სინგულარული ყოფაქცევა.

მაშინ შრედინგერის განტოლება

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}f\right)^2\psi=E\psi$$

რომლის ფორმალური ამონახსნია

$$\psi=exp\,i\chi(t,\boldsymbol{x})\psi(f=0)$$

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}+\hbar\boldsymbol{\nabla}\chi-\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}f\right)^2\psi(f=0)=E\psi(f=0)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\chi=\frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{\nabla}f$$

ამონახსნი

$$\chi(\boldsymbol{x})=\frac{q}{\hbar c}\int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\nabla}f=\frac{q}{\hbar c}[f(\boldsymbol{x})-f(-\infty)]$$

ვარგისიანია როცა ვექტორ პოტენციალი$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}f$ ინტეგრებადია, ე.ი. ინტეგრალი არაა დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე.

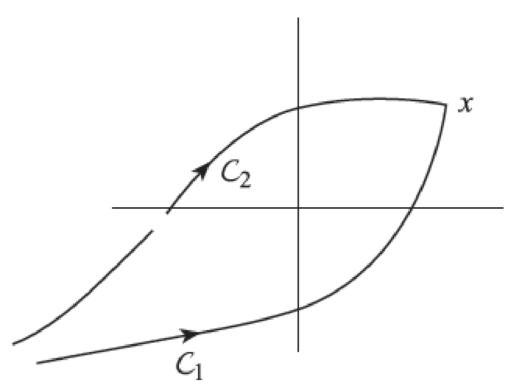
თუ მივიჩნევთ, რომ ეს ასეა მაშინ

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\right)^2\psi=E\psi$$

ხოლო შესაბამისი ფორმალური ამონახსნია

$$\psi(t,\boldsymbol{x})=exp\left(i\frac{q}{c\hbar}\int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A}\right)\psi(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0})$$

ფაზური ფაქტორის ინტეგრებადობა



განვიხილოთ ელექტრონის მოძრაობა ორი სავარაუდო გზით და განვიხილოთ ამონახსნის ვარგისიანობა, დავითვალოთ ამ გზებზე $\boldsymbol{A}$-ს ინტეგრალთა სხვაობა . სტოქსის თეორემის დახმარებით ვიღებთ, რომ:

$$\int_{C_1}^{x} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A} - \int_{C_2}^{x} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A} = \oint_{C} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A} = \iint_{\boldsymbol{S}} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \iint_{\boldsymbol{S}} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = \Phi_m$$

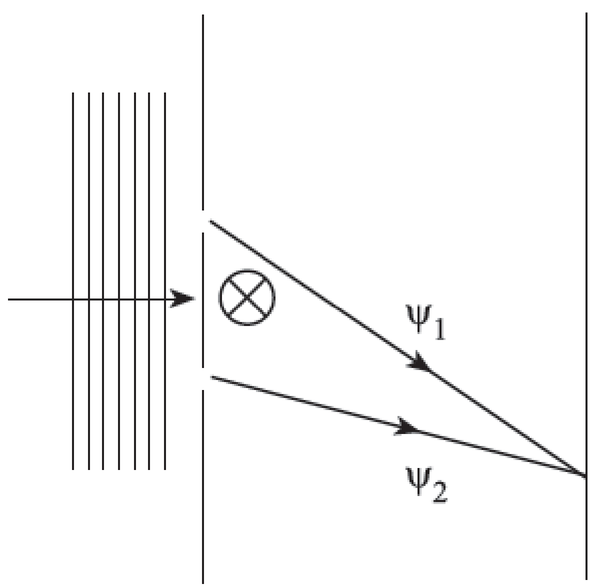
სადაც Φ_m ამ კონტურში გამავალი მაგნიტური ნაკადია. შესაბამისად თუ ნაკადი განსხვავებულია 0-სგან ანუ თუ

$$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$$

ყალიბური ველი არაინტეგრებადია.

აარონოვ-ბომის ექსპერიმენტი

აარონოვ-ბომის ექსპერიმენტი წარმოადგენს ზემოთ აღწერილი საკითხის წარმოსაჩენ ნათელ მაგალითს. ექსპერიმენტი წარმოადგენს ელექტრონების ნაკადის ინტერფერენციის აღწერას მათი მოძრაობისას უსასრულოდ გრძელ სოლენოიდთან, რომლის შიგნით ერთგვაროვანი მაგნიტური ველია, გარეთ კი მაგნიტური ველი ნულის ტოლია.



$$\psi_{1,2}(t,\boldsymbol{x}) = exp\left(i\frac{q}{c\hbar}\int_{C_{1,2}}^{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A}\right)\psi(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0})$$

ელექტრონის ტალღური ფუნქცია სოლენოიდის მახლობლად მოძრაობისას ვექტორ პოტენციალის გამო იძენს დამატებით ფაზას (მიუხედავად იმისა რომ მაგნიტური ველი ამ არეში ნულის ტოლია). ეს ფაზები 1 და 2 გზებისთვის განსხვავებულია. სრული ტალღური ფუნქცია

$$\psi_{Tot} = \psi_1 + \psi_2$$

1 და 2 გზების სხვადახვა მხრიდან უვლიან მაგნიტურ ნაკადს, განსხვავებული ფაზებიდან გამომდინარე კი ადგილი აქვს ინტერფერენციას. ინტერფერენციული წევრი შეიცავს მაგნიტურ ნაკადზე დამოკიდებულ წევრს

$$\psi^*{}_1\psi_2 + c.c \to i\frac{q}{c\hbar}\int_{C_2}^{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A} - i\frac{q}{c\hbar}\int_{C_1}^{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A}\, i = \frac{q}{c\hbar}\Phi_m$$

ვთქვათ$q = e$ (ელექტრონის მუხტია -e). განვმარტოთ ერთეულოვანი მაგნიტური ნაკადი

$$\phi_0 = \frac{hc}{e}$$

მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$e^{i\frac{e}{c\hbar}\Phi_m} = e^{i2\pi\frac{\Phi_m}{\phi_0}}$$

თუ მთელიანი ნაკადი ერთეულოვანი ნაკადის ჯერადია ანუ სიდიდე

$$\frac{\Phi_m}{\phi_0} = \text{მთელი}$$

ფაზა

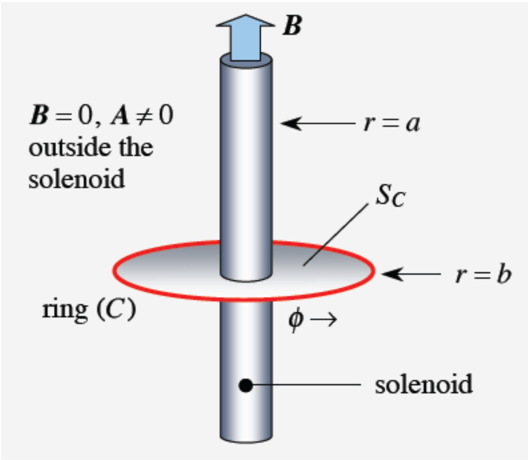
$$e^{i\frac{e}{c\hbar}\Phi_m} = 1$$

ამ შემთხვევაში ჰამილტონიანი

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\right)^2 \text{ ექვივალენტურია } \frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2$$

ელექტრონის მოძრაობა წრეზე

იმისთვის რომ უკეთ დავინახოთ მათემატიკურადაც ვექტორ პოტენციალის გავლენა ელექტრონზე, განვიხილოთ კონკრეტული პრაქტიკული ამოცანა, აარონოვ-ბომის ეფექტი ბმული მდგომარეობის ელექტრონისთვის, როცა დამუხტული ნაწილაკი მოძრაობს b რადიუსის წრეზე, რომლის ცენტრში არის $a < b$ რადიუსის უსასრულო სიგრძის სოლენოიდი, რომლის შიგნით არის ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი$\boldsymbol{B}(0,0,B_z)$. სოლენოიდის გარეთ $\boldsymbol{B} = 0$. გამოვიყენოთ კულონური ყალიბი $\boldsymbol{\nabla A} = 0$



ამოცანის სპეციფიკიდან გამომდინარე გადავიდეთ ცილინდრულ კოორდინატებზე

$$B_z = (rot\,\boldsymbol{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)$$

სოლენოიდის გარეთ, ანუ სადაც$r > a$

$$A_\varphi = \frac{\Phi_m}{2\pi r} \qquad \rightarrow \qquad B_z = 0$$

$$\oint d\boldsymbol{r}\boldsymbol{A} = \int_0^{2\pi} d\varphi r\frac{\Phi_m}{2\pi r} = \iint dS\, B_z = \Phi_m$$

სადაც Φ_m -მაგნიტური ნაკადი.

ხოლო

$$\iint dS$$

წარმოადგენს ინტეგრებასb რადიუსის დისკზე.

ყალიბური გარდაქმნებით:

$$H = \frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi$$

$$H\Psi = E\Psi$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}; \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f$$

$$H \to H' = \frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}')^2 + q\varphi'$$

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\frac{q}{\hbar}f}\Psi$$

$$H'\Psi' = E\Psi'$$

$$H = \frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A})^2 = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} - q\frac{\Phi_m}{2\pi r}\right)^2; \quad r = b$$

$$H = \frac{1}{2mb^2}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} - q\frac{\Phi_m}{2\pi}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{2mb^2}\left[-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{q\Phi_m}{2\pi\hbar}\right)^2 + iq\frac{\Phi_m}{\pi\hbar}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + 2iq\frac{\Phi_m}{2\pi\hbar}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\Psi = \frac{2mb^2}{\hbar^2}E\Psi - \left(\frac{q\Phi_m}{2\pi\hbar}\right)^2\Psi$$

$$\frac{q\Phi_m}{2\pi\hbar} \equiv \beta; \qquad \frac{2mb^2}{\hbar^2}E - \beta^2 \equiv \epsilon$$

საბოლოოდ მიღება განტოლება

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} - 2i\beta\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} + \epsilon\Psi = 0$$

რომლის ამონახსნია

$$\Psi = ae^{i\lambda\varphi}$$

ალგებრულად კი

$$\lambda^2 - 2\beta\lambda - \epsilon = 0$$

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon}$$

თუ გავითვალისწინებთ სასაზღვრო პირობას ანუ პერიოდულობას

$$\Psi(0) = \Psi(2\pi)$$

$$\lambda = n \in \mathbb{Z}$$

$$(n-\beta)^2 = \epsilon + \beta^2$$

$$\epsilon = (n-\beta)^2 - \beta^2$$

$$\frac{2mb^2}{\hbar^2}E = \epsilon + \beta^2 = (n-\beta)^2$$

ენერგია

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2}(n-\beta)^2 = \frac{\hbar^2}{2mb^2}\left(n - \frac{q\Phi_m}{2\pi\hbar}\right)^2; \qquad n \in \mathbb{Z}$$

ე.ი. ენერგია დამოკიდებული მაგნიტური ველის ნაკადზეΦ_m, მიუხედავად იმისა, რომ მაგნიტური ველი სოლენოიდის გარეთ ნულის ტოლია.

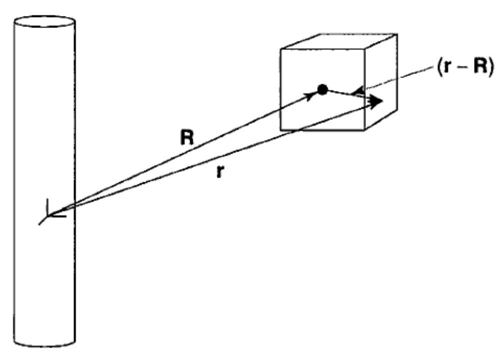
$$E_{-|n|} > E_{+|n|}$$

$\boldsymbol{A}$ ხსნის ორმაგ გადაგვარებას, რომელიც გამოწვეულია$e^{\pm in\varphi}$წყვილით: ენერგია განსხვავებულია$e^{in\varphi}$-სა და$e^{-in\varphi}$-სთვის.

თუ ნაკადი$\Phi_m = 0$ მოცემული n-სთვის

$$E_{-|n|} = E_{+|n|}$$

აარონოვ-ბომის ეფექტი და გეომეტრიული ფაზა



დავუშვათ ნაწილაკიმოქცეულია ყუთში სადაც მისი პოტენციალია$V(\boldsymbol{r} - R)$. $\boldsymbol{R}$-ყუთის ცენტრის რადიუს ვექტორი. მაშინ:

$$\left\{\frac{1}{2m}[-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-qA(\boldsymbol{r})]^2+V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\right\}\psi_n=E_n\psi_n$$

$$\psi_n=\psi_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R})$$

ვთქვათ

$$\psi_n=e^{if}\psi_n'$$

$$f=\frac{q}{\hbar}\int_{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')$$

$$\nabla f=\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

$$\left\{\frac{1}{2m}[-i\hbar\boldsymbol{\nabla}]^2+V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\right\}\psi'_n=E_n\psi'_n$$

$$H'\psi'_n=E_n\psi'_n$$

$$\psi'_n=\psi'_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$$

შემოვატაროთ ყუთი სოლენოიდის გარშემო და დავითვალოთ ე.წ. ბერის ფაზა.

$$\gamma_m(t)=i\int_{R(t_0)}^{R(t)}dR_i\psi_m^*(\{R\})\frac{\partial}{\partial R_i}\psi_m(\{R\})$$

ჩვენ შემთხვევაში

$$\gamma_m=i\oint d\boldsymbol{R}\,\langle\psi_m|\nabla_{\boldsymbol{R}}\psi_m\rangle$$

$$|\nabla_{\boldsymbol{R}}\psi_m\rangle=\nabla_{\boldsymbol{R}}\left[e^{if}\psi_m'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\right]=e^{if}\{i\nabla_{\boldsymbol{R}}f\psi_m'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})+\nabla_{\boldsymbol{R}}\psi_m'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\}=$$

$$=e^{if}\left\{-i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})\psi_m'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})-\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})\right\}$$

$$\langle\psi_m|\nabla_{\mathbf{R}}\psi_m\rangle=\int d\mathbf{r}\left\{-i\frac{q}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{R})\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})^*\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})\right\}-\int d\mathbf{r}\,\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})^*\nabla_{\mathbf{r}}\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})$$

თუმცა

$$\int d\mathbf{r}\,\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})^*\nabla_{\mathbf{r}}\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})=\frac{i}{\hbar}\int d\mathbf{r}\,\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})^*\hat{\mathbf{p}}\psi_m'(\mathbf{r}-\mathbf{R})=\frac{i}{\hbar}\langle\mathbf{p}\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\rangle$$

$$\left\langle \psi'_m \middle| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \middle| \psi'_m \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \psi'_m | [\mathbf{r}, H'] | \psi'_m \rangle = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{d}{dt}\int d\mathbf{r} \psi'^{*}_m(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi'(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \langle \mathbf{p} \rangle = 0$$

შესაბამისად

$$\langle \psi_m | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_m \rangle = -i\frac{q}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{R}) \int d\mathbf{r} \{\psi'_m(\mathbf{r}-\mathbf{R})^{*} \psi'_m(\mathbf{r}-\mathbf{R})\} = -i\frac{q}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{R})$$

საბოლოოდ ვიღებთ გეომეტრიულ ფაზას.

$$\gamma_m = i\oint d\mathbf{R} \langle \psi_m | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_m \rangle = \frac{q}{\hbar}\oint d\mathbf{R}\, \mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{q}{\hbar}\Phi$$

დასკვნა

ნაშრომშიაღწერილია აარონოვ-ბომის ეფექტის განსაკუთრებულობა, კერძოდ ის, რომ კვანტურ მექანიკაში ვექტორ პოტენციალი იძენს ფიზიკურ შინაარსს და ხდება დამზერადი. არსებითად მნიშვნელოვანია ყალიბური გარდაქმნიდან გამომდინარე ტალღური ფუნქციის მიერ შეძენილი ფაზის ინტეგრებადობა. როცა მაგნიტური ნაკადი განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ ყალიბური ველი არაინტეგრებადია. მიუხედავად იმისა, რომ აარონოვ-ბომის ექსპერიმენტში, უშუალოდ ელექტრონზე მაგნიტური ველი არ მოქმედებს, ტალღური ფუნქციის ინტერფერენციული წევრი, ასევე გეომეტრიული ფაზა დამოკიდებულია მაგნიტურ ნაკადზე. ბმული ელექტრონის ამოცანის განხილვისას კი ცალსახად ჩანს ელექტრონის ენერგეტიკული სპექტრის დამოკიდებულება ამ ნაკადზე.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Introduction to. Quantum Mechanics. David J. Griffiths. Reed College. Prentice Hall.
2. Introduction to electrodynamics. David J. Griffiths, Reed College.
3. Classical Electrodynamics Third Edition. John David Jackson.
4. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. Y. Aharonov and D.Bohm.
5. The Classical Theory of Fields, Fourth Edition: Volume 2 (Course of Theoretical Physics Series) by L D Landau.
6. Quantum mechanics. Franz Schwabl.
7. The Geometric Phase in Quantum Systems. Arno Bohm.