

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი



გიორგი პოპოვი

“ნიადაგში გრიგალური დენების განაწილების  
შესწავლა”

ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერია

ნაშრომი შესრულებულია მეცნიერებათა მაგისტრის ხარისხის  
მოსაპოვებლად ელექტრულ და ელექტრონულ ინჟინერიაში

სამაგისტრო ნაშრომის ხელმძღვანელი: ფიზ. მათ. მეცნ. კანდიდატი  
ასოცირებული პროფესორი  
დავით კაკულია

თბილისი

2018

---

# სარჩევი

---

ანოტაცია .....	3
Annotation .....	4
შესავალი.....	5
§1.1 აქტუალურობა.....	5
§1.1.1 ჰუმანიტარული განადმვის პრობლემა .....	5
§1.1.2 ელექტრომაგნიტური დაზვერვის პრობლემა .....	7
§1.2 არსებული განადმვის სისტემების მიმოხილვა .....	8
ამოცანა .....	11
§2.1 ამოცანის ჩამოყალიბება .....	11
§2.2 ქვეამოცანები .....	11
მეთოდები .....	12
§3.1 ელექტრომაგნეტიზმის მოკლე მიმოხილვა .....	12
§3.1.1 მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები .....	12
§3.1.2 მაქსველის განტოლებების ინტეგრალური სახე .....	14
§3.1.3 სასაზღვრო პირობები.....	14
§3.1.4 ბესელის ფუნქციები .....	16
§3.1.5 ნიადაგის ძირითად ელექტრომაგნიტური თვისებები .....	17
§3.2 ი. დასის ნიადაგში ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების მოდელირების მეთოდი .....	18
§3.2.1 ველები ჰაერში .....	22
§3.2.2 ველები ნიადაგში .....	23
§3.3 დამხმარე გამომსხივებლენის მეთოდი - Method of Auxiliary Sources (MAS) .....	24
§3.4 მომენტების მეთოდი - Method of Moments (MoM) .....	34
მოდელირება და შედეგები .....	35
დასკვნა.....	36
გამოყენებული ლიტერატურა.....	37
დანართი .....	41

---

## ანოტაცია

---

ნაშრომში განხილულია მაღალსიხშირული ( $\geq 100$  კჰც) ელექტრომაგნიტური დასხივებით გამოწვეული ელექტრომაგნიტური ველების და გრიგალური დენების ნიადაგში განაწილების მოდელირების შედეგები. მიღებული შედეგები გამოყენებული იქნება ახალი ტიპის დეტექტორული სისტემების შესაქმნელად, კერძოდ კი ნიადაგში არსებული ღრუ არეების დეტექტირებისთვის, სადაც პოტენციურად შეიძლება იყოს განთავსებული არამეტალური ნაღმები ან იმპროვიზირებული ასაფეთქებელი მოწყობილობები. ნაშრომის ფარგლებში შემენილი ცოდნა და გამოცდილება იქნება სასარგებლო მსგავსი ამოცანების გადასაჭრელად გეოფიზიკაში. შედეგებს დიდი საერთაშორისო მნიშვნელობა აქვს რეგიონალური კონფლიქტების და საომარი მოქმედებების შედეგად დანადგმული ტერიტორიების გასაწმენდად.

არსებული ნაშრომის მომდევნო ეტაპები მნიშვნელოვან წვლილს შეიტანს განადმვითი ტექნოლოგიების განვითარებაში.

ნაშრომი შედგება შესავლისგან, და ოთხი თავისგან: ამოცანა, მეთოდები, მოდელირება და შედეგები და დასკვნა. თითო თავი დაყოფილია ქვეთავებად. ნაშრომის შესავალში აღწერილია პრობლემის თანამედროვე მდგომარეობა და მისი აქტუალურობა, მოყვანილია არსებული სისტემები და მეთოდები. პირველ თავში ჩამოყალიბებულია ამოცანა და აღწერილია დასახული მიზნები. მეორე თავში მოყვანილია გამოყენებული მეთოდები. მესამე თავში აღწერილია შესრულებული სამუშაო და მოდელირებისთვის შექმნილი პროგრამული პაკეტი, ხოლო მეოთხე თავში კი გამოტანილია დასკვნა. მიღებული შედეგები და პროგრამული კოდები მოყვანილია დანართში.

---

# Annotation

---

In the current paper, computer modeling of a distribution of electromagnetic fields and eddy currents in the soil caused by high frequency ( $\geq 100$  kHz) electromagnetic radiation is reviewed. Results then will be used for creating a new type of detection system, more specifically a system that can detect voids in the soil, where non-metallic landmines and other explosives can be potentially placed. Experience and knowledge gained during the work on this project will be helpful for solving geophysical problems. The results will have international importance for demining areas mined during regional conflicts and hostilities.

The next stages of the current project will make an important contribution to the development of demining technologies.

The current thesis consists of an introduction and four chapters: a problem, methods, modelling and results, and conclusion. Each of the chapters consists of subchapters. The introduction includes an overview of the problem discussed in the thesis and its actuality, existing systems and methods. The first chapter describes the problem and tasks. The second chapter describes methods and software used for modeling. The third chapter of the thesis describes work done on modeling of eddy currents. Lastly, the four chapter of the current thesis includes a conclusion. Results and programming codes are available in the Supplemental Section of the current thesis.

# შესავალი

## §1.1 აქტუალურობა

### §1.1.1 ჰუმანიტარული განადმგვის პრობლემა

დღესდღეობით ერთ-ერთი გადაუჭრელი პრობლემა, რომლის წინაშეც კაცობრიობა დგას, არის «ჰუმანიტარული განადმგვის» პრობლემა.

ნაღმი - ფეთქებადი მოწყობილობაა, რომელიც მოქმედებაში მოდის მასთან სიახლოვის ან კონტაქტის შედეგად. ნაღმს, რომელიც მიწაზე ან მიწის ქვეშ არის მოთავსებული, შეუძლია ათწლეულების განმავლობაში აქტიურ მდგომარეობაში ყოფნა. ნაღმის დეტონაცია ხდება მასზე გარე ძალების ზემოქმედების დროს (ადამინი, ცხოველი, ტექნიკა და ა.შ.). თავისი დანიშნულების მიხედვით ნაღმების რამოდენიმე ტიპი არსებობს: ტანკსაწინააღმდეგო, ქვეითთაწინააღმდეგო, ობიექტური, სპეციალური და ა.შ..

მეორე მსოფლიო ომის დასრულების შემდეგ მსოფლიოს ყველა რეგიონში ამა თუ იმ მიზეზის გამო სამხედრო კონფლიქტები ხდებოდა. ყველა ამ კონფლიქტს თან ახლდა სახმელეთო ნაღმების გამოყენება. ამასთან, წლიდან წლამდე, ნაღმების გამოყენების აქტიურობა და მასშტაბი იზრდებოდა. შედეგად, გაეროს ოფიციალური სტატისტიკის მიხედვით, მსოფლიოს ყველა რეგიონში, 64 ქვეყნის ტერიტორიაზე დაახლოებით 110 მილიონი ნაღმი არის დაყენებული და 100 მილიონი კი მზადაა დაუყოვნებელი გამოყენებისთვის.

სპეციალისტების თვალსაზრისით, სახმელეთო ნაღმების გამოყენების აქტივიზაცია შემდეგი მიზეზებით არის განაპირობებული:

- ქმედების დიდი ეფექტურობა; მძიმე საბრძოლო მანქანების წყობიდან გამოყვანის შესაძლებლობა, ცოცხალი ძალისთვის ზიანის მიყენება (ამერიკაში ერთ ნაღმზე დაჭრილი ადამიანის მკურნალობისთვის საჭირო თანხა საშუალოდ 5000 აშშ დოლარს შეადგენს)

- მარტივი კონსტრუქცია, რის გამოთაც მათ დასამზადებლად დაბალკვალიფიცირებული პერსონალიც კი საკმარისია

- დაბალი ღირებულება; ზოგიერთი ქვეითთასაწინააღმდეგო ნაღმის ღირებულება 3 აშშ დოლარს შეადგენს, ხოლო ტანკსაწინააღმდეგოს – 75. ამავე დროს ნაღმების ნეიტრალიზაციის ხარჯები 300-1000 აშშ დოლარის ფარგლებში ვარიირებს

- ფართო საერთაშორისო ბაზრის არსებობა (ამჟამად ცნობილია ნაღმების დაახლოებით 700 ნაირსახეობა, რომლებისგან უმეტესობის ფასი 0.5-300 აშშ დოლარის ფარგლებშია)

- მწარმოებელთა ქვეყნების და ექსპორტიორების მყიდველისთვის მარტივად და იაფად ნაღმების დიდი პარტიების მიწოდების უნარი

არსებულ პრობლემებს აუარესებს მოსახლეობის აუფეთქებელ ნაღმებზე და ჭურვებზე აფეთქების საშიშროება. ეს პრობლემა განსაკუთრებით დამახასიათებელია კუვეიტის, კამბოჯისა და ყოფილი იუგოსლავიის ტერიტორიებისთვის.

საერთაშორისო წითელი ჯვრის შეფასებით მსოფლიოში ნაღმებზე აფეთქების შედეგად ყოველთვიურად საშუალოდ 800 ადამიანი იღუპება. 1975 წლიდან ნაღმების აფეთქების შედეგად დაიღუპა ან დაშავდა მილიონ ადამიანზე მეტი. სიტუაციას აუარესებს განაღმვის დაბალი ტემპი - ასი ათასს ნეიტრალიზირებულ ნაღმზე მოდის ორი - ხუთი მილიონი ახალი. ასეთი ვითარების გამო გასული საუკუნის ბოლოსკენ დაყენებული ნაღმების რაოდენობა 110 მილიონიდან (რომელთა განაღმვისათვის საჭირო თანხა დაახლოებით 33 მილიარდ აშშ დოლარს შეადგენს) 135 მილიონამდე გაიზარდა.

## §1.1.2 ელექტრომაგნიტური დაზვერვის პრობლემა

ელექტროდაზვერვის გამოყენება აჩქარებს და აიაფებს გეოლოგიურ კვლევებს ძვირადღირებული საბურღე სამუშაოების შემცირების ხარჯზე. ელექტროდაზვერვის განვითარება პირდაპირ არის დაკავშირებული ახალი მეთოდების შემუშავებასთან და ნიადაგის დამუშავების სიზუსტესთან.

ელექტროძიებას დიდი გამოყენება აქვს არქეოგეოფიზიკაში (არქეოლოგიური გეოფიზიკა). ამ მიმართულების ძირითადი ამოცანა დაფარული მატერიალურ-კულტურული მემკვიდრობის ძეგლების ძიების გეოფიზიკური მეთოდების შესწავლა არის.

ძიების გეოფიზიკური და არქეოლოგიური მეთოდები მიწის სიღრმეში არსებულ ობიექტების გამოვლენას ემსახურება. გეოფიზიკა ზოგადად დიდ სიღრმეზე არსებულ ობიექტებს იკვლევს. გეოფიზიკისგან განსხვავებით, არქეოლოგიური ძიების ძირითადი ამოცანა არის მცირე სიღრმეზე განლაგებული ძეგლების აღმოჩენა.

ელექტროძიება ზოგადად ორ ნაწილად იყოფა: ელექტროძიება მუდმივი დენით და ელექტროძიება ცვლადი დენით. მუდმივი დენით ელექტროძიება დაკავშირებული არის გარემოში მუდმივი დენის გავლისას კუთრი წინაღობის შესწავლასთან, ხოლო ცვლადი დენით კი - მასთან დაკავშირებული ელექტრომაგნიტური ველის შესწავლასთან.

ელექტრომაგნიტური ტალღებით ზონდირება ასევე არის გამოყენებული გეორადარში. ზონდირების მუშაობის პრინციპი მარტივია: გადამცემი ანტენით ხდება ელექტრომაგნიტური ველით ნიადაგის დასხივება. ელექტრომაგნიტური ტალღები შემდეგ აირეკლება მიწისქვეშა ობიექტებიდან და მათი დეტექტირება ხდება მიმღები ანტენის მეშვეობით. ამის შემდეგ შესაძლებელი ხდება მიღებული ინფორმაციის ვიზუალიზაცია.

ელექტრომაგნიტური მეთოდებით კულტურული ფენების შესწავლა უდიდესი მეთოდური მიღწევაა, რომელშიც შეჯერებულია მაგნიტოძიების და ელექტროძიების საშუალებები. ეს მეთოდები პრაქტიკულად არაა მგრძნობიარე შესასწავლი ტერიტორიის გეოლოგიური აგებულების მიმართ

[42]. GPR (Ground Penetrating Radar) [29] ფართოდ იწერება არქეოლოგიურ კვლევებში.

ნიადაგის ძირითად ელექტრომაგნიტური თვისებებს მიეკუთვნება: დიელექტრიკული შეღწევადობა ( $\epsilon$ ), ელექტროგამტარობა ( $\sigma$ ) მაგნიტური ამთვისებლობა ( $\chi$ ), მაგნიტური შეღწევადობა ( $\mu$ ), ელექტროქიმიური აქტიურობა ( $\alpha$ ) და პოლარიზებადობა ( $\eta$ ).  $\rho$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  პარამეტრებით და ველის სიხშირით განისაზღვრება გარემოს ველის შთანთქმის კოეფიციენტი. დამატებითი ინფორმაცია ამ პარამეტრების შესახებ იხ. თავში. §3.1.5 ნიადაგის ძირითად ელექტრომაგნიტური თვისებები.

## §1.2 არსებული განაღმვის სისტემების მიმოხილვა

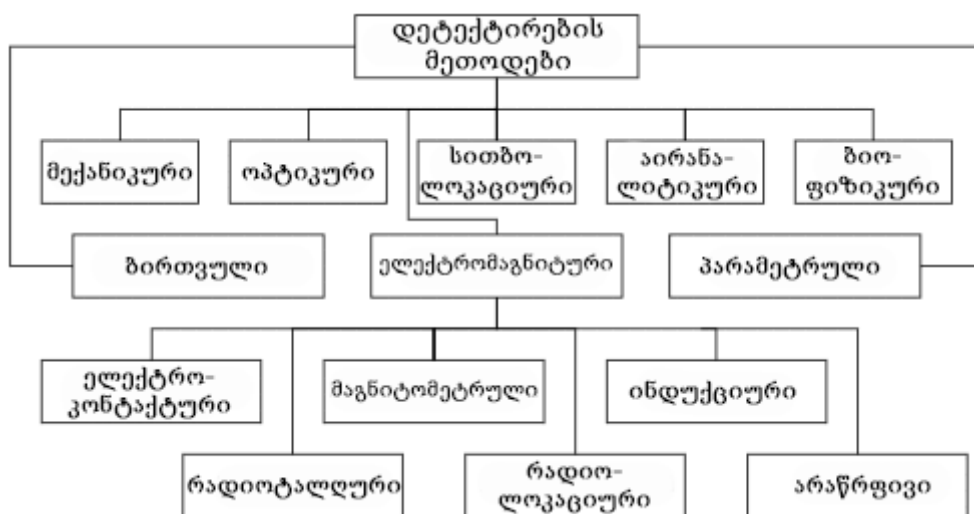
უკანასკნელი წლების განმავლობაში ამ პრობლემის გადასაჭრელად სამხედრო და სამოქალაქო დაწესებულებების მხრიდან ჩაიდო დიდი ძალისხმევა. განსაკუთრებით პრობლემატურია პლასტმასისა და ნაკლებად მეტალური ნაღმების აღმოჩენა დაბალ სიხშირეზე მომუშავე სენსორებით.

დღესდღეობით ხშირად გამოიყენება მიწაში შეღწევადი რადარი (Ground-penetrating radar – GPR) [29]. GPR არის გეოფიზიკური მეთოდი, რომელიც რადარის იმპულსების გამოყენებით ზედაპირქვეშა სტრუქტურების ასახვას ახდენს. ამისთვის GPR იყენების მაღალსიხშირულ (ხშირ შემთხვევაში პოლარიზებულ) რადიოტალღებს 10მჰც - 2.6გჰც დიაპაზონში. GPR სისტემის გამოყენებით ხდება ელექტრომაგნიტური ტალღებით მიწის დასხივება. დასხივება შეიძლება მოხდეს ერთი ან რამოდენიმე ადგილიდან. დასხივების შემდეგ ხდება არეკვლილი ველის ფიქსირება დროსა და სივრცეში. მიღებული სიგნალი ხშირ შემთხვევაში არ შეიცავს სრულ განმასხვავებელ ინფორმაციას. ეს პრობლემატურს ხდის სხვადასხვა შემადგენლობის სხეულების გარჩევას ერთმანეთისგან.

GPR სისტემისგან განსხვავებით, EMI სისტემები (Electromagnetic Induction, ელექტრომაგნიტური ინდუქცია) ფუნქციონირებენ დაბალ სიხშირულ დიაპაზონში, დაახლოებით 10ჰც-დან - 100კჰც-მდე [30]. ამ სიხშირეებზე მიწა ძირითადად „გამჭირვალეა“, რადგან ფენის სიღრმე (Skin



Depth) დიდია მოცემული მიწის გამტარებლობასთან მიმართებით [31]. EMI სენსორები სხეულებზე დენების ინდუცირებით იღებენ მათზე ინფორმაციას. დაცემული ველის მიერ აღძრული დენები წარმოქმნიან მეორად მაგნიტურ ველს. ეს ველი შემდგომ ბრუნდება სენსორში, სადაც მისი ფიქსირება ხდება. EMI სისტემები ძირითადად კარგად მუშაობენ მეტალის სხეულების დეტექტირებაზე 1 მეტრის სიღრმეზე. ასეთ სხეულებს მიეკუთვნება ე.წ. UXO (Unexploded Ordnance, აუფეთქებელი საბრძოლო მასალა) [32] ობიექტები.



სურ. 1, დეტექტირების მეთოდები

COBRA და ASTAMIDS სისტემები გამოიყენება სანაპირო დაზვერვისთვის. COBRA სისტემა შედგება სამი კამერისგან, ერთი წინა ხედვის და ორი სპექტრალურისაგან. მათი საშუალებით ხდება სპექტრალური ანომალიების დეტექტირება მიწაში, რომლებსაც ნაღმის ზომები აქვთ. მიღებული ინფორმაცია შემდგომ გადაეცემა სახმელეთო ტაქტიკური ინფორმაციის ასახვის სისტემას, სადაც, მიღების შემდეგ, გადის დამუშავებას. სისტემის ნაკლი არის დამუშავებისთვის საჭირო დრო.

ASTAMIDS სისტემა შედგება ცილინდრული კონტეინერისგან ინფრაწითელი სენსორებით და ციფრული დამუშავების ელექტრული სქემებით. მას შეუძლია მეტალის ნაღმების და ნაღმების მეტალის მცირე რაოდენობით დეტექტირება. ASTAMIDS სისტემას ინფორმაციის დამუშავებისთვის ასევე სჭირდება დიდი დრო.

CIMMD სისტემას ინფრაწითელი სენსორების გარდა ასევე გააჩნია ელექტრომაგნიტური ინდუქციური სენსორებიც. სისტემის საშუალებით ხდება არამეტალური ნაღმების დეტექტირება.

# ამოცანა

## §2.1 ამოცანის ჩამოყალიბება

არსებული პროექტის საბოლოო მიზანია ახალი ტიპის დეტექტორული სისტემის შექმნა, რომლის საშუალებით ნიადაგში არსებული ღრუ არეების, სადაც პოტენციურად არამეტალური ნაღმები და იმპროვიზირებული ასაფეთქებელი მოწყობილობები შეიძლება იყოს განთავსებული, დეტექტირება იქნება შესაძლებელი. პროექტის პირველი ეტაპი არის არსებული სამაგისტრო ნაშრომის ამოცანა, კერძოდ კი მაღალსიხშირული ( $\geq 100$  კჰც) ელექტრომაგნიტური დასხივებით გამოწვეული ელექტრომაგნიტური ველების და გრიგალური დენების ნიადაგში განაწილების მოდელირება.

ნაშრომში ელექტრომაგნიტური ველის გამომსხივებლის წყაროდ აღებულია ერთი ხვიისგან შემდგარი კოჭა. მოდელირების დროს გამოყენებული სიხშირე არის 100კჰც.

## §2.2 ქვეამოცანები

არსებული ამოცანის გადაწყვეტა, დამუშავება და მოდელირება შემდეგი საფეხურების გავლით მოვახდენთ:

- კოჭის მიერ გამოსხივებული ელექტრული და მაგნიტური ველების მოდელირება ღია სივრცეში ი. დასის მეთოდით [3]
- კოჭის მიერ გამოსხივებული ელექტრული და მაგნიტური ველების მოდელირება ღია სივრცეში სხვა მეთოდებით (EMCoS Studio [40], Method of Moments [37])
- სხვადასხვა მეთოდით მიღებული შედეგების ერთმანეთთან შედარება
- ი. დასის მეთოდით ელექტრული და მაგნიტური ველების მოდელირება ნიადაგის არსებობისას
- ნიადაგში გრიგალური დენების განაწილების მოდელირება

# მეთოდები

## §3.1 ელექტრომაგნიტიზმის მოკლე მიმოხილვა

ამ თავში ჩვენ მოკლედ განვიხილავთ ელექტრომაგნიტურ თეორიას. ჩვენ მოვიყვანთ მაქსველის განტოლებების როგორც დიფერენციალურ, ასევე ინტეგრალურ სახეებს და განვიხილავთ ელექტრომაგნიტურ სასაზღვრო პირობებს.

### §3.1.1 მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები

ფარადეის ინდუქციის კანონი	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(1.1)
მაგნიტური ველის ცირკულაციის თეორემა	$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	(1.2)
გაუსის კანონი	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	(1.3)
გაუსის კანონი მაგნიტური ველისთვის	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	(1.4)

სადაც

- $\vec{E}$  არის ელექტრული ველის დამაბულობის ვექტორი [ ვ / მ ]
- $\vec{H}$  - მაგნიტური ველის დამაბულობის ვექტორი [ ა / მ ]
- $\vec{D}$  - ელექტრული წანაცვლების ვექტორი (ელექტრული ინდუქცია) [ კულ / მ<sup>2</sup> ]
- $\vec{B}$  - მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი [ ტლ ]
- $\vec{j}$  - დენის მოცულობითი სიმკვრივე [ ა / მ<sup>2</sup> ]
- $\rho$  - მუხტის მოცულობითი სიმკვრივე [ კულ / მ<sup>3</sup> ]

იზოტროპული, ერთგვაროვანი წრფივი გარემოსთვის ადგილი აქვს მატერიალურ განტოლებებს:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

სადაც

- $\varepsilon$  - გარემოს დიელექტრიკული შეღწევადობა [ ფ / მ ]
- $\mu$  - გარემოს მაგნიტური შეღწევადობა [ ჰნ / მ ]

(1.5) და (1.6) განტოლებების გათვალისწინებით შეგვიძლია გადავწეროთ მაქსველის განტოლებები შემდეგი სახით:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.10)$$

დროში ჰარმონიული ველის შემთხვევაში კი,

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -i\mu\omega \vec{H} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + i\varepsilon\omega \vec{E} \quad (1.12)$$

### §3.1.2 მაქსველის განტოლებების ინტეგრალური სახე

ფარადეის ინდუქციის კანონი	$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$	(1.13)
მაგნიტური ველის ცირკულაციის თეორემა	$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_s \vec{D} \cdot d\vec{s}$	(1.14)
გაუსის კანონი	$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_v \rho dv$	(1.15)
გაუსის კანონი მაგნიტური ველისთვის	$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	(1.16)

აქ  $s$  ორგანზომილებიანი, გაუსის თეორემაში ჩაკეტილი, ხოლო ფარადეის და ამპერი-მაქსველის განტოლებაში ღია ზედაპირია, რომელიც შემოსაზღვრავს  $v$  მოცულობას, რომლის საზღვარი არის  $l$  ჩაკეტილი კონტური.

### §3.1.3 სასაზღვრო პირობები

ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე ადგილი აქვს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს [43]:

- ერთი გარემოდან მეორეში გადასვლისას ელექტრული ველის მხები მდგენელი (ტანგენციალური, გასწვრივი) უწყვეტია

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2, \quad (1.17)$$

სადაც  $\vec{E}_1$  და  $\vec{E}_2$  ელექტრული ველებია პირველ და მეორე გარემოში, ხოლო  $\vec{n}$  - ორი გარემოს გამყოფი ზედაპირის ნორმალია

- თუკი ერთ-ერთი გარემო იდეალური გამტარია, მაშინ ველი მასში ვერ აღწევს და ამ შემთხვევაში

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2 = 0 \quad (1.18)$$

3. თუ ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე არსებობს თავისუფალი ელექტრული მუხტები, მაშინ  $\vec{D}$  ნორმალური მდგენელი განიცდის წყვეტას

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2 = q, \quad (1.19)$$

სადაც  $q$  თავისუფალი მუხტების ზედაპირული სიმკვრივეა

4. ერთი გარემოდან მეორეში გადასვლისას  $\vec{B}$  მდგენელი უწყვეტია

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2 \quad (1.20)$$

5. თუ ერთ-ერთი გარემო იდეალური გამტარია, მაშინ  $\vec{B}$  და  $\vec{H}$  ნორმალური მდგენელები ამ გარემოში ნულია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = \vec{n} \cdot \vec{H}_1 = \vec{n} \cdot \vec{H}_2 = 0 \quad (1.21)$$

6. თუ ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე გვაქვს ელექტრული დენი, მაშინ  $\vec{H}$  გასწორვი მდგენელი განიცდის წყვეტას

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 - \vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{\sigma}, \quad (1.22)$$

ხოლო, თუ ერთ-ერთი (დავუშვათ მეორე) გარემო იდეალური გამტარია მაშინ

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{\sigma}, \quad (1.23)$$

სადაც  $\vec{\sigma}$  ზედაპირული დენის სიმკვრივეა

7. მაგნიტური მუხტების და დენების შემოტანის შემთხვევაში გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 - \vec{n} \times \vec{E}_2 = \vec{\sigma}_{\text{მაგ}}, \quad (1.24)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 - \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = \eta_{\text{მაგ}}, \quad (1.25)$$

სადაც  $\vec{\sigma}_{\text{მაგ}}$  და  $\eta_{\text{მაგ}}$  ზედაპირული მაგნიტური დენის და მაგნიტური მუხტის სიმკვრივეებია

8. თუ ერთ-ერთი გარემო ხასიათდება დიდი, მაგრამ სასრული გამტარებლობით, მაშინ  $\vec{E}$  და  $\vec{H}$  მხები მდგენელები გარემოს გამყოფ ზედაპირზე ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი მიახლოებითი ტოლობით:

$$\vec{n} \times \vec{E} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} (\vec{n} \cdot (\vec{n} \times \vec{H})) \quad (1.26)$$

### §3.1.4 ბესელის ფუნქციები

ბესელის ფუნქციები - მათემატიკაში ფუნქციების ოჯახი, რომლებიც ბესელის დიფერენციალური განტოლების კანონიკური ამოხსნები არიან:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - a^2)y = 0, \text{ ბესელის დიფ. განტოლება,} \quad (1.27)$$

სადაც  $a$  - ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია (ზოგადად შემთხვევაში - კომპლექსური), რომელსაც რიგს უწოდებენ.

ბესელის განტოლება გვხდება ლაპლასის და ჰელმჰოლცის განტოლებების ცილინდრულ და სფერულ კოორდინატებში ამოხსნის დროს. ამიტომ ბესელის ფუნქციები ხშირად გამოიყენება ტალღების გავრცელების ამოცანებში, მაგალითად:

- ელექტრომაგნიტური ტალღები ცილინდრულ ტალღგამტარში
- სითბოგამტარობა ცილინდრულ ობიექტებში
- თხელი მრგვალი მემბრანის რხევის ფორმები
- მრგვალ ხვრელზე დიფრაგირებული სინათლის ინტენსიობის განაწილება
- ნაწილაკების სიჩქარე სითხით შევსებულ და თავისი ღერძის გარშემო მბრუნავ ცილინდრში
- ტალღური ფუნქციები სფერულ სიმეტრიულ პოტენციურ ყუთში

ბესელის ფუნქციები სხვა ამოცანებშიც გამოიყენება, მაგალითად, სიგნალების დამუშავების დროს.

პირველი გვარის ბესელის ფუნქციები აღინიშნება  $J_a(x)$ -ით. ეს ფუნქციები ბესელის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებია  $x = 0$  წერტილში,  $a$ -ს მთელი ან არაუარყოფითი მნიშვნელობების დროს.

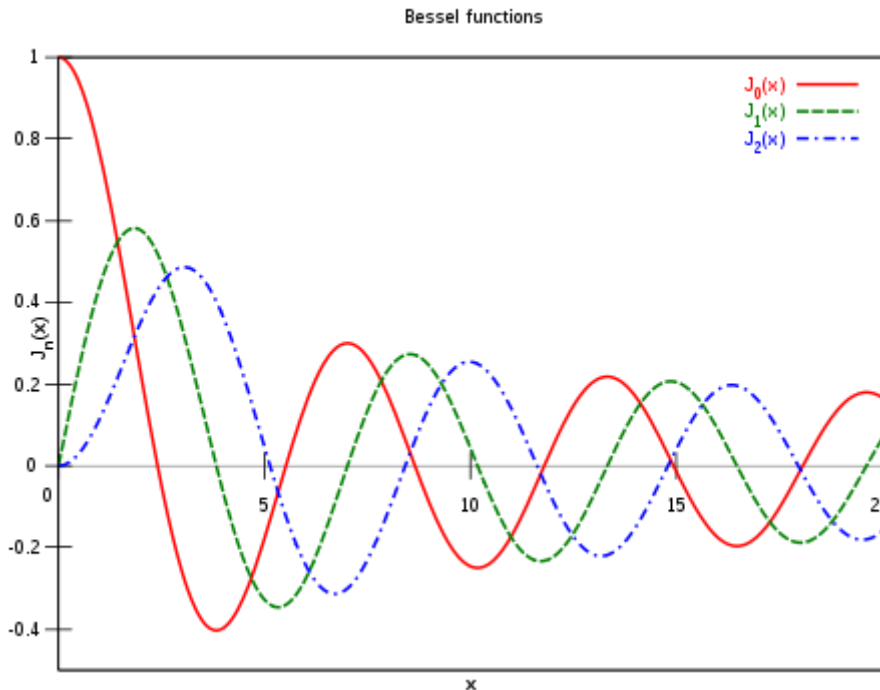
ეს ფუნქციები მწკრივის სახით შეგვიძლია გამოვსახოთ:

$$J_a(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+a+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a}, \quad (1.28)$$

სადაც  $\Gamma$  ეილერის გამა ფუნქციაა.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \quad (1.29)$$





სურ. 2. ბესელის ფუნქციების  $J_a(x)$  გრაფიკი, სადაც  $a = 0, 1$  და  $2$

ბესელის ფუნქციების გრაფიკი მიღევადი სინუსოიდის ფორმისაა, მაგრამ მათი ნულები არაპერიოდულია.

### §3.1.5 ნიადაგის ძირითად ელექტრომაგნიტური თვისებები

როგორც უკვე ნაშრომის შესავლის ნაწილში აღვნიშნეთ, ნიადაგის ძირითად ელექტრომაგნიტური თვისებებს მიეკუთვნება: დიელექტრიკული შეღწევადობა ( $\epsilon$ ), ელექტრული გამტარობა ( $\sigma$ ) მაგნიტური ამთვისებლობა ( $\chi$ ), მაგნიტური შეღწევადობა ( $\mu$ ), ელექტროქიმიური აქტიურობა ( $\alpha$ ) და პოლარიზებადობა ( $\eta$ ). ქვემოთ მოყვანილია ამ თვისებების განმარტებები.

- დიელექტრიკული შეღწევადობა:
  - აბსოლუტური - ( $\epsilon$ , [ფ / მ]), აკავშირებს ერთმანეთთან  $\vec{E}$  ელექტრული ველის დამაბულობას და  $\vec{D}$  ელექტრულ ინდუქციას;

- ფარდობითი - ( $\epsilon_r$ , უგანზ.), კოეფიციენტი, რომელიც აჩვენებს რამდენჯერ განსხვავდება ერთმანეთისგან ორი მუხტის ურთიერთქმედება ერთ გარემოში მეორესგან.
- მაგნიტური შეღწევადობა:
  - აბსოლუტური - ( $\mu$ , [ $\text{ჰნ} / \text{მ}$ ]), აკავშირებს ერთმანეთთან  $\vec{H}$  მაგნიტური ველის დამაბულობას და  $\vec{B}$  მაგნიტურ ინდუქციას;
  - ფარდობითი - ( $\mu_r$ , უგანზ.), კოეფიციენტი, რომელიც ტოლია  $\mu_r \frac{\mu}{\mu_0}$ , სადაც  $\mu_0$  მაგნიტური მუდმივაა.
- ელექტროგამტარობა: ( $\sigma$ , [ $\text{სიმ} / \text{მ}$ ]), ნივთიერების უნარი გაატაროს ელექტრული დენი.
- მაგნიტური ამთვისებლობა: ( $\chi$ , უგანზ.), ფიზიკური სიდიდე, რომელიც ნივთიერების მაგნიტური მომენტის მასში არსებულ მაგნიტურ ველთან კავშირს ახასიათებს,  $\chi = \frac{M}{H}$ , სადაც  $M$  მაგნიტური ველის ზემოქმედებით ნივთიერების დამაგნიტებულობაა, ხოლო  $H$  - მაგნიტური ველის დამაბულობაა.
- ელექტროქიმიური აქტიურობა: ( $\alpha$ , ვ), ნივთიერების თვისება შექმნას საკუთარი მუდმივი ელექტრული ველი.
- პოლარიზებადობა: ( $\eta$ , უგან.), ნივთიერების, მასში დენის გავლის დროს, მუხტების დაგროვების, ხოლო დენის შეწყვეტის შემდეგ - განმუხტვის თვისებაა.

### §3.2 ი. დასის ნიადაგში ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების მოდელირების მეთოდი

ზოგიერთი ნიადაგი არასასურველ გავლენას ახდენს მგრძნობიარე მეტალის დეტექტორებზე, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება ნიადაგში დამარხულ ნაღმების დეტექტირებისთვის. მიუხედავად იმისა, რომ გეოფიზიკაში ამ განხრით ჩატარებული იყო ბევრი სამუშაო, მეტალის დეტექტირების მკვლევარები ბოლო დრომდე არ ითვალისწინებდნენ პრობლემური ნიადაგის საკითხს. შედეგად, ამ დარგში არსებობს მკაცრი

სამეცნიერო გამოკვლევების ნაკლებობა, კერძოდ კი საკითხში, თუ როგორ და რა გავლენას ახდენენ ნიადაგის ელექტრომაგნიტური პარამეტრები მეტალის დეტექტორებზე. ამიტომ არსებობს საჭიროება იმისა, რომ ამ სფეროში ჩატარდეს როგორც თეორიული, ასევე ექსპერიმენტალური კვლევა იმისთვის, რომ გავარკვიოთ, რა ელექტრომაგნიტური პარამეტრები მნიშვნელოვანია და რა გავლენას ახდენენ ისინი სხვადასხვა ტიპის მეტალის დეტექტორებზე.

იოგაჯიმ დასის მეთოდში ნიადაგი დამოძვლირებული არის, როგორც ნახევარსივრცე. ამასთან ივარაუდება, რომ ელექტრული გამტარობა ( $\sigma$ ) არის რეალური ( $\sigma \in \mathbb{R}$ ) და არ არის დამოკიდებული სიხშირეზე, ხოლო მაგნიტური ამთვისებლობა კომპლექსურია ( $\chi \in \mathbb{C}$ ) და არის დამოკიდებული სიხშირეზე.

გეოფიზიკაში ჩატარებულ სამუშაოებში და კვლევებში ხშირ შემთხვევაში წყაროსა და მიმღების როლს ასრულებს დიპოლი. ამასთან სამეცნიერო კვლევებში ძირითადად კონცენტრაციას ახდენენ მიწის გამტარებლობაზე, ხოლო მიწის მაგნიტურ ამთვისებლობას ნულად ითვლიან. როდესაც მაგნიტური ამთვისებლობა განისაზღვრება როგორც ნულისგან განსხვავებული სიდიდე, ის უმეტეს შემთხვევაში წარმოდგენილია სიხშირისგან დამოუკიდებელი რეალური კონსტანტის სახით.

მეტალის დეტექტორებში, რომლებიც გამოიყენება განაღმვის დროს, ხშირ შემთხვევაში სენსორის სახით იყენებენ 10-15 სანტიმეტრის რადიუსიან კოჭებს (UXO ობიექტების დეტექტირების დროს გამოიყენება სხვა ტიპის სენსორები, კოჭებით, რომლების რადიუსები დაახლოებით 50 სანტიმეტრის ფარგლებშია). ინტერესის ობიექტები, რომლებიც ხშირ შემთხვევაში არიან რამოდენიმე მილიმეტრის ზომის მეტალის საგნები, დამარხულია რამოდენიმე სანტიმეტრის სიღრმეზე (მაქსიმალურ სიღრმედ, ზოგადად, 30 სანტიმეტრი არის მიჩნეული).

ისტორიული მოვლენების გამომდინარე, დღესდღეობით განაღმვის პრობლემა უმეტეს შემთხვევაში დედამიწის ტროპიკულ რეგიონებს ახასიათებს (ამასთან ჰუმანიტარული განაღმვის პრობლემის წინაშე დგას მსოფლიოს თითქმის ყველა რეგიონი). ამ რეგიონებში ნიადაგი შეიძლება საკმაოდ მაგნიტური აღმოჩნდეს და მისი მაგნიტური ამთვისებლობა უნდა

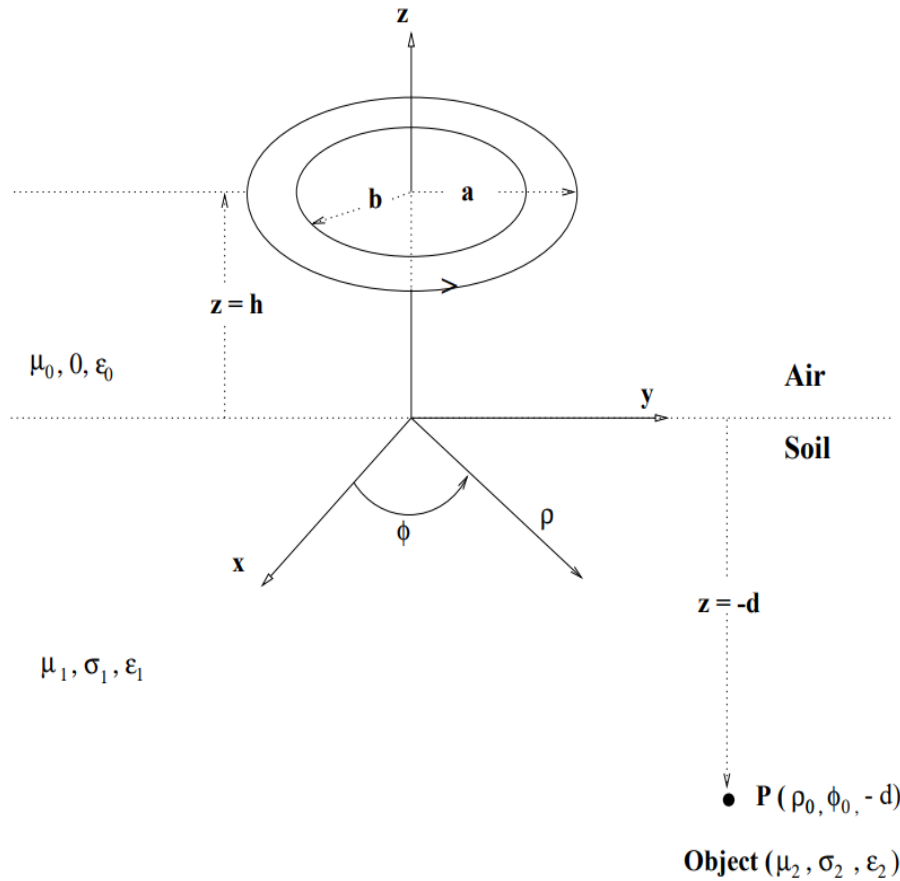
იყოს დამოდელირებული როგორც კომპლექსური სიხშირეზე დამოკიდებული სიდიდე.

მოცემული მეთოდი მიზნად არ ისახავს ნიადაგის შემადგენელი ნაწილების და პროცესების და მოვლენების, რომლების გამო ნიადაგს ექმნება მაგნიტური თვისებები, შესწავლას. ინფორმაცია ამ თემაზე მოცემულია [33-39] ნაშრომებში. მიუხედავად ამისა, მეთოდი ითვალისწინებს ნიადაგის ელექტრომაგნიტურ თვისებებს. მეთოდში, როგორც ნიადაგის, ასევე თავისუფალი სივრცის დიელექტრიკული შეღწევადობა ( $\epsilon$ ) მიღებულია სიხშირეზე დამოუკიდებელ სიდიდედ და ზოგიერთ შემთხვევაში რიცხვითი გამოთვლების დროს უგულებელყოფილი იქნება. დიელექტრიკული შეღწევადობის ( $\epsilon$ ) ნაირად, ელექტრული გამტარობა მიღებული არის, როგორც სიხშირისგან დამოუკიდებელი სიდიდე, ხოლო ნიადაგის მაგნიტური პარამეტრები დამოდელირებულია შემდეგი სახით:

$$\mu_1 = \mu_0(1 + \chi(\omega)), \quad (1.30)$$

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) = \chi_0 \left( 1 - \frac{1}{\ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)} \cdot \ln \frac{i\omega\tau_2 + 1}{i\omega\tau_1 + 1} \right), \quad (1.31)$$

სადაც  $\mu_0$  და  $\mu_1$  შესაბამისად თავისუფალი სივრცის და ნიადაგის მაგნიტური შეღწევადობებია.  $\chi(\omega)$  ნიადაგის კომპლექსური სიხშირეზე დამოკიდებული მაგნიტური ამთვისებლობაა, რომლის რეალური და წარმოსახვითი კომპონენტები შესაბამისად  $\chi'$  და  $\chi''$  არის.  $\chi_0$  მაგნიტური ამთვისებლობის DC მნიშვნელობაა. განტოლებაში (1.31), რომელიც წარმოადგენს მაგნიტური ამთვისებლობის ერთ-ერთ მოდელს, ივარაუდება, რომ მაგნიტური რელაქსაციის დროის კონსტანტები ერთგვაროვნად არიან განაწილებულნი  $\tau_2$ -სა და  $\tau_1$ -ს შორის.  $\chi(\omega)$  სიდიდის რეალური და წარმოსახვითი კომპონენტების ყოფაქცევის ანალიზი არის განხილული [40, 41] ნაშრომებში. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მოცემული ამოცანისთვის ნიადაგი ერთგვაროვანი ნახევარსივრცის სახით იქნება დამოდელირებული. ამოცანის გეომეტრიული მოდელი წარმოსახულია სურ. 3-ზე.



სურ. 3, ამოცანის გეომეტრიული მოდელი

დეტექტორი (სენსორი), როგორც ზოგადად ხდება, წარმოდგენილია ორი კონცენტრირებული კოპლანარული წრიული კოჭით. გადამცემი კოჭის რადიუსი და ხვების რაოდენობა შესაბამისად  $a$  და  $N_r$ -ა, მიმღები კოჭის -  $b$  და  $N_r$ . სურ. 3-ზე ასევე მოყვანილია მაგნიტური შეღწევადობები ( $\mu_j$ ), ელექტრული გამტარობები ( $\sigma_j$ ) და დიელექტრული შეღწევადობები ( $\epsilon_j$ ), სადაც  $j=0, 1, 2$  წარმოადგენს შესაბამისად ჰაერს, ნიადაგს და ობიექტს. კოჭა დაყენებულია მიწიდან  $z=h$  სიმაღლეზე. გადამცემის დენი წარმოდგენილია  $Ie^{i\omega t}$  სახით.

წრიული სიმეტრიის გამო, ველის კომპონენტები, რომლებიც ნულის ტოლი არაა, არის  $H$  მაგნიტური ველის  $\rho$  და  $z$  კომპონენტები, ხოლო  $E$  ელექტრული ველის -  $\phi$  კომპონენტა. განტოლებების სიმარტივისთვის შემოტანილია შემდეგი აღნიშვნები:

$$\gamma_0^2 = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2, \tag{1.32}$$

$$u_0^2 = \lambda^2 + \gamma_0^2, \quad (1.33)$$

$$\gamma_1^2 = -i\sigma_1\mu_1\omega - \mu_1\varepsilon_1\omega^2, \quad (1.34)$$

$$u_1^2 = \lambda^2 + \gamma_1^2, \quad (1.35)$$

სადაც  $\lambda$  ინტეგრირების ცვლადია.

როდესაც წანაცვლების დენი არის უგულვებელყოფილი, რაც ხშირ შემთხვევაში ხდება, ზემოთმოცემული განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\gamma_0^2 = 0, \quad (1.36)$$

$$\gamma_1^2 = i\sigma_1\mu_1\omega, \quad (1.37)$$

$$u_1^2 = \lambda^2 + \gamma_1^2. \quad (1.38)$$

### §3.2.1 ველები ჰაერში

ქვემოთ მოცემულია ველების კომპონენტების გამოსახულებები. ზედა ინდექსი + აღნიშნავს სივრცის რეგიონს კოჭის ზემოთ ( $z > h$ ), ხოლო ზედა ინდექსი - კი რეგიონს კოჭისა და ნიადაგს შორის ( $0 < z < h$ ). ზედა ინდექსი *air* აღნიშნავს პირველად ველს, ხოლო *soil* - მეორად, არეკვლილს. წყაროდ აღებული არის ერთხვიანი კოჭა რადიუსით  $a$  და დენით -  $Ie^{i\omega t}$ . დროის კომპონენტა არის ჩახშობილი.

ველები  $z > h$  არეში:

$$\begin{aligned} H_{0\rho}^+ &= H_{0\rho}^{+air} + H_{0\rho}^{+soil} \\ &= \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda a) e^{-u_0(z-h)} d\lambda \\ &+ \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\mu_1 u_0 - \mu_0 u_1}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} \lambda J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{-u_0(z+h)} d\lambda, \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned}
H_{0z}^+ &= H_{0z}^{+air} + H_{0z}^{+soil} \\
&= \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda a) J_0(\lambda \rho) e^{-u_0(z-h)} d\lambda \\
&+ \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\mu_1 u_0 - \mu_0 u_1}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} \times \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda a) J_0(\lambda \rho) e^{-u_0(z+h)} d\lambda,
\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}
E_{0\phi}^+ &= E_{0\phi}^{+air} + E_{0\phi}^{+soil} \\
&= -\frac{i\mu_0 \omega Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{-u_0(z-h)} d\lambda \\
&- \frac{i\mu_0 \omega Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\mu_1 u_0 - \mu_0 u_1}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} \times \frac{\lambda}{u_0} J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{-u_0(z+h)} d\lambda
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$0 < z < h$  არეში გვაქვს ველების შემდეგი გამოსახულებები:

$$\begin{aligned}
H_{0\rho}^- &= H_{0\rho}^{-air} + H_{0\rho}^{-soil} \\
&= -\frac{Ia}{2} \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{-u_0(h-z)} d\lambda \\
&+ \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\mu_1 u_0 - \mu_0 u_1}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} \lambda J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{-u_0(h+z)} d\lambda,
\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}
H_{0z}^- &= H_{0z}^{-air} + H_{0z}^{-soil} \\
&= \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda a) J_0(\lambda \rho) e^{-u_0(h-z)} d\lambda \\
&+ \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\mu_1 u_0 - \mu_0 u_1}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} \times \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda a) J_0(\lambda \rho) e^{-u_0(h+z)} d\lambda,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
E_{0\phi}^- &= E_{0\phi}^{-air} + E_{0\phi}^{-soil} \\
&= -\frac{i\mu_0 \omega Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{-u_0(h-z)} d\lambda \\
&- \frac{i\mu_0 \omega Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\mu_1 u_0 - \mu_0 u_1}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} \times \frac{\lambda}{u_0} J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{-u_0(h+z)} d\lambda
\end{aligned} \tag{1.44}$$

### §3.2.2 ველები ნიადაგში

იმის გამო, რომ სენსორების მეშვეობით ველების გაზომვები მხოლოდ ჰაერში ხდება, ველებს ნიადაგში ზოგადად არ ითვალისწინებენ. ამის გარდა,

მიწაში არსებული ობიექტის გამომდახილი ხშირ შემთხვევაში არის აპროქსიმირებული როგორც ნიადაგის ნახევარსივრცისა და ჰაერში ობიექტის გამომდახილების ჯამი. უკეთესი აპროქსიმაცია იქნება, თუ გავითვალისწინებთ ველებს ნიადაგში.

ველების ზოგადი გამოსახულებები ნიადაგში ( $z < 0$ ) არის:

$$H_{1\rho} = -\frac{Ia}{2} \int_0^{\infty} \frac{2\mu_0 u_1}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} \lambda J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{u_1 z} e^{-u_0 h} d\lambda, \quad (1.43)$$

$$H_{1z} = \frac{Ia}{2} \int_0^{\infty} \frac{2\mu_0 \lambda}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} \lambda J_1(\lambda a) J_0(\lambda \rho) e^{u_1 z} e^{-u_0 h} d\lambda, \quad (1.44)$$

$$E_{1\phi} = -\frac{i\omega\mu_0 Ia}{2} \int_0^{\infty} \frac{2\mu_1 \lambda}{\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1} J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{u_1 z} e^{-u_0 h} d\lambda. \quad (1.45)$$

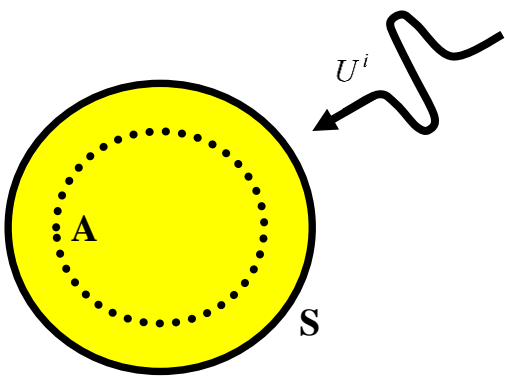
ზემოთმოცემულ ველების გამოსახულებებში გამოყენებული არის ბესელის ფუნქციები პირველი გვარის და 0 და 1 რიგის ( $J_0, J_1$ ).

### §3.3 დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდი - Method of Auxiliary Sources (MAS)

დიფრაქციისა და გაბნევის მოვლენების გამოკვლევა, რომელიც შეეხება ორ და სამგანზომილებიან ობიექტებს, მეტად მნიშვნელოვანი თემაა მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში და ამ ბოლო წლებში გამოიწვია საკმაოდ დიდი ინტერესი. ეფექტური რიცხვითი მეთოდების შემუშავება წარმოადგენს დიდ პრაქტიკულ ინტერესს. თანამედროვე ტექნოლოგიების ტექნიკური და ფიზიკური პარამეტრების მიმართ მოთხოვნილებების გაზრდის გამო, ეხლანდელი კომპიუტერული რესურსი, რადგან მეხსიერებისა და ცენტრალური პროცესორის შესაძლებლობები დროში შეზღუდულია, შემოსაზღვრავს ისეთი კარგად ცნობილი მეთოდების გამოყენებას, როგორებიცაა: მომენტების მეთოდი, სასრული ელემენტების მეთოდი, სასრული სხვაობები დროით არეში და სხვა.



დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდის მკაცრი მათემატიკური დაფუძნება მოცემული იყო ქართველი მათემატიკოსის ვიქტორ კუპრაძის მიერ 1967წ. მეტი თვალსაჩინოებისთვის ამ მეთოდის ძირითადი ასპექტები განიხილება სხვა ფართოდ გავრცელებული რიცხვითი მეთოდების პარალელურად, რომლებიც ემყარებიან ექვივალენტობის თეორემას [9]. ამ თეორემის თანახმად მატერიალურ გარემოში გაბნეული ელექტრომაგნიტური ველი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას თავისუფალ გარემოში ექვივალენტური მუხტების და დენების მიერ შექმნილი ველების საშუალებით. ძირითადად ყველა მეთოდი ემყარება გაბნეული ელექტრომაგნიტური ველის წარმოდგენის ამ პრინციპს. ეს მეთოდები მაქსველის განტოლებების ინტეგრალურ წარმოდგენებს იყენებენ. შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებების გული წარმოადგენს სინგულარულ ფუნქციას ინტეგრების არეში და ამდენად საჭიროებს განმარტებას, რათა ინტეგრალი იყოს კრებადი. ასეთ განმარტებად გამოდგება ინტეგრალი კოშის მთავარი აზრით. რიცხვითი მოდელირების დროს სასაზღვრო პირობის დასაწერად ჩვეულებრივ იღებენ სხეულის ზედაპირზე რაღაც წერტილთა სიმრავლეს. აღნიშნული სინგულარობების გამო რიცხვითი ინტეგრებისას ხდება სინგულარობის წერტილთაწანაცვლება ზედაპირის მახლობლად. ამ გზით მიიღება ერთ-ერთი უმარტივესი რიცხვითი მეთოდი, ე.წ. ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი. ამ მეთოდის მიხედვით გაბნეული ველი წარმოდგენილია იმ მუხტებისა და დენების ველების ჯამად, რომლებიც



სურ. 4

*S* - მეტალური სხეულის ზედაპირი,  
*A* - დამხმარე ზედაპირი,  
*U<sup>i</sup>* - დაცემული ტალღა

სხეულის ზედაპირზე დაცემული ველის მიერ იყვანენ ინდუცირებულნი.

დ.გ.მ. ითვალისწინებს, რომ სხეულის ზედაპირზე გაბნეულ ველს გააჩნია ანალიზური გაგრძელება მის შიდა არეში. ანალიზური გაგრძელების არსებობამ ვ. კუპრაძეს საფუძველი მისცა გაბნეული ველის აღსაწერად ზედაპირული დენების მაგიერ, გამოეყენებინა ზედაპირის შიგნით წანაცვლებული (ჩაჩოჩებული) დენები.

პრობლემის ასეთი კუთხით შეხედვამ მნიშვნელოვნად გააუმჯობესა, სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა.

დიფრაქციის ამოცანის ჩამოყალიბება შემდეგნაირად არის შესაძლებელი [10]: დიელექტრიკული და მაგნიტური შეღწევადობის მქონე გარემოში მოთავსებულია  $S$  ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეული და ცნობილია დაცემული ელექტრომაგნიტური ტალღა  $U^i$ . საჭიროა სივრცის ნებისმიერ წერტილში განისაზღვროს ელექტრომაგნიტური ველის  $E$  და  $H$  ვექტორები.

ზოგადად ამოცანა დაიყვანება ჰელმჰოლცის განტოლების ამონახსნის პოვნაზე, შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით:

$$\Delta U^s(\mathbf{r}) + k^2 U^s(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.46)$$

$$W\{U^s(\mathbf{r}) - U^i(\mathbf{r})\} = 0, M(\mathbf{r}) \in S, \quad (1.47)$$

სადაც  $U^i(\mathbf{r})$  დაცემული, ხოლო  $U^s(\mathbf{r})$  გაბნეული ელექტრომაგნიტური ველია, ხოლო  $W$ -სასაზღვრო პირობის ოპერატორია.

$\{U(|r_n - r|)\}_{n=1}^{\infty}$  ფუნქციები წარმოადგენენ ჰელმჰოლცის განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნებს, რომელთა საშუალებითაც აღიწერება გაბნეული ველი. სადაც  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  ეკუთვნის დამხმარე  $\sigma$  ზედაპირს. ასეთი ფუნქციებია [10]:

ორგანზომილებიან შემთხვევაში:

$$U(|r_n - r|) = H_0^{(1)}(k\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}) \quad (1.48)$$

სამგანზომილებიან შემთხვევაში:

$$U(|r_{n-r}|) = \frac{e^{ik|r_n-r|}}{|r_n-r|}, \quad (1.49)$$

სადაც

$$|r_n - r| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 + (z_n - z)^2}, \quad (1.50)$$

$$M(x_n, y_n, z_n) \in \sigma \quad (1.51)$$

$r$  დაკვირვების წერტილამდე რადიუს-ვექტორია,

$$M(\mathbf{r}) = M(x, y, z).$$

კუპრაძის მიერ შემოთავაზებულ დ.გ.მ.-ით, რაიმე ჩაკეტილ ლიაპუნოვის ტიპის ზედაპირით [11] შემოსაზღვრულ სხეულზე ელექტრომაგნიტური ტალღის დიფრაქციის მოდელირებისას გაბნეული

ველი წარმოდგენილია შესაბამისი ტალღური განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნების წრფივი კომბინაციით, რომელთა სინგულარობები განლაგებულია ზედაპირიდან დაშორებულ ნებისმიერ გლუვ წარმოსახვით ზედაპირზე (სხეულის შიგნით, სურ. 4), რომელსაც დამხმარე ზედაპირს უწოდებენ, ხოლო მასზე განლაგებულ წყაროებს – დამხმარე გამომსხივებლებს. მეთოდის რიცხვითი რეალიზაციისთვის ძირითად და დამხმარე ზედაპირებზე გამოყოფილია რაღაც აზრით თანაბრად განაწილებულ წერტილთა სიმრავლეები. მაქსველის განტოლებების ფუნდამენტური ამონახსნები, რომელთა სინგულარობებიც ლოკალიზებულია დამხმარე ზედაპირის წერტილებში [12, 13, 14]. ჰელმჰოლცის განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნების  $\{U(|r_n - r|)\}_{n=1}^{\infty}$  ფუნქციათა სისტემა, რომელიც აღწერს ველის მახასიათებლებს (ელექტრულს, მაგნიტურს ან ველის პოტენციალს)  $S$  ზედაპირზე, წარმოადგენს სრულ და წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას,  $L2$  ( $S$  ზედაპირზე განსაზღვრულ კვადრატით ინტეგრირებად ფუნქციათა სივრცეში) ფუნქციათა სივრცეში; რაც ნიშნავს, რომ  $\mu$  ზედაპირზე განსაზღვრულ ნებისმიერი კვადრატით ინტეგრირებადი  $U^i(x, y, z)$  ფუნქციისთვის არსებობს ისეთი  $j_k$  კოეფიციენტები, რომ ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  რიცხვისთვის არსებობს ისეთი  $N$ , რომ ნებისმიერი  $n \geq N$  მართებულია შეფასება:

$$\int_s \left\| \left[ \sum_{k=1}^N j_k U(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}|) - U^i(x, y, z) \right] \right\|^2 ds < \varepsilon(N) \quad (1.52)$$

ანუ, აღნიშნული სისტემის სასრული რაოდენობის ფუნქციას  $S$  ზედაპირზე შეუძლია აღწეროს გაბნეული ველის მახასიათებელი ყველა შესაძლო ფუნქცია წინასწარ მოცემული სიზუსტით. ამოხსნა კი გამოისახება ფუნდამენტური ამონახსნების წრფივი კომბინაციით შესაბამისი კოეფიციენტების გათვალისწინებით:

$$\int_s \left| W \left[ \sum_{k=1}^N j_k U(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}|) - U^i(x, y, z) \right] \right|^2 ds < \varepsilon(N), \quad (1.53)$$

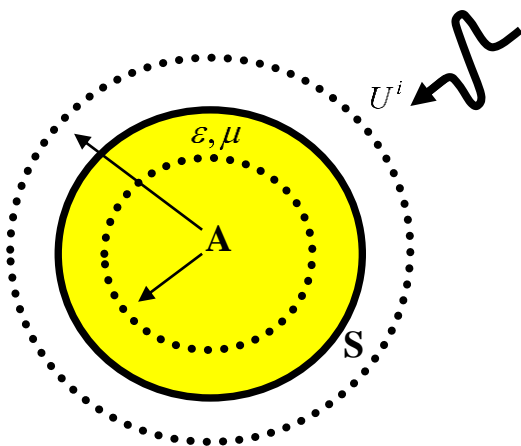
სადაც  $\varepsilon(N)$  მოცემული სიზუსტეა, რომელიც ზოგადად დამოკიდებულია წერტილთა რაოდენობაზე, ანუ ამ სიზუსტით

$$U^i(x, y, z)|_S \approx \sum_{k=1}^N j_k U_k(|r_k - r|)|_S. \tag{1.54}$$

მაშინ დასმული სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა:

$$\tilde{U}^s(x, y, z)|_S \approx \sum_{k=1}^N j_k U_k(|r_k - r|)|_S. \tag{1.55}$$

ამდენად, ელექტრომაგნიტური ველი ამ ზედაპირზე აპროქსიმირდება მიღებული სრული სისტემის ფუნქციათა წრფივი კომბინაციით. (1.47) ზემოთ აღნიშნული სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის გამო, გაბნეული ველის ზედაპირიდან ანალიზური გაგრძელების საშუალებით შესაძლებელია გაბნეული ველის გამოთვლა მთელს სივრცეში. დამხმარე გამომსხივებლების ამპლიტუდები გამოითვლება სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებით. ძირითადად ამაში მდგომარეობს ვ. კუპრამის მიერ შემოთავაზებული დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდის შინაარსი.



სურ. 5

S - დიელექტრიკული სხეულის ზედაპირი,  
 A - დამხმარე ზედაპირები,  
 $U^i$  - დაცემული ტალღა

დიელექტრიკული გამბნევის შემთხვევაში, სხეულის გარეთ გაბნეულ ველთან ერთად საჭიროა სხეულის შიგნით არსებული ველის აღწერაც. ამისთვის საჭიროა ავაგოთ ორი დამხმარე ზედაპირი, გამბნევი სხეულის შიგნით და გარეთ (სურ. 5). დამხმარე გამომსხივებლები,

რომლებიც მოთავსებულნი არიან სხეულის შიგნით არსებულ დამხმარე ზედაპირზე, ისევე როგორც იდეალურად გამტარი სხეულის

შემთხვევაში, განსაზღვრავენ ველს სხეულის გარეთ, ხოლო გარეთ მოთავსებული გამომსხივებლები განსაზღვრავენ ველს დიელექტრიკის შიგნით. თითოეულ ამ ზედაპირზე მოთავსებულია  $N$  რაოდენობის დამხმარე გამომსხივებელი, რომელთა ვექტორ პოტენციალები წარმოდგენილია ჰელმჰოლცის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნებით:

$U(k\sqrt{\varepsilon\mu}|r_n - r|)$ , სადაც  $\varepsilon$  და  $\mu$  შესაბამისად სხეულის დიელექტრიკული და მაგნიტური შეღწევადობებია,  $r_n$  იმ წერტილის რადიუს-ვექტორია, სადაც დამხმარე გამომსხივებელია მოთავსებული, ხოლო  $r$  დაკვირვების წერტილის რადიუს-ვექტორია. უცნობი ელექტრული და მაგნიტური ველები გამოისახება როგორც დამხმარე გამომსხივებლების ველების ჯამი უცნობი კოეფიციენტებით:

$$E(r) = \hat{w}_e \left\{ \sum_{n=1}^N a_n U_n(k\sqrt{\varepsilon\mu}|r_n - r|) \right\} \quad (1.56)$$

$$H(r) = \hat{w}_h \left\{ \sum_{n=1}^N a_n U_n(k\sqrt{\varepsilon\mu}|r_n - r|) \right\} \quad (1.57)$$

სადაც  $\hat{w}_e$  და  $\hat{w}_h$  შესაბამისად უცნობი ელექტრული და მაგნიტური ველების ვექტორ-პოტენციალის ოპერატორებია. უნდა აღინიშნოს, რომ დიელექტრიკის შიგნით ველი აღიწერება სხეულის გარეთ მოთავსებული  $N$  რაოდენობის დამხმარე გამომსხივებლების მეშვეობით და პირიქით.

თუ გამზნევ სხეულს ეცემა  $U^{inc}(r)$  ტალდა, სასაზღვრო პირობები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \hat{W}_e \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{out} U(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}|r_n - r|) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{in} U(k\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}|r_n - r|) \right]_S = E_{\tau}^{inc}(r)|_S \\ \hat{W}_h \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{out} U(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}|r_n - r|) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{in} U(k\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}|r_n - r|) \right]_S = H_{\tau}^{inc}(r)|_S \end{cases} \quad (1.58)$$

სადაც  $\hat{W}_e$  და  $\hat{W}_h$  სასაზღვრო პირობების ოპერატორებია,  $a_n^{in}$  და  $a_n^{out}$  შესაბამისად დიელექტრიკის შიგნით და გარეთ განლაგებული დამხმარე გამომსხივებლების კოეფიციენტებია, ხოლო  $E_{\tau}^{inc}(r)|_S$  და  $H_{\tau}^{inc}(r)|_S$   $S$  ზედაპირზე დაცემული ველის ტანგენციალური მდგენელებია. თუ  $S$  ზედაპირზე არჩეულია  $N$  კოლოკაციის წერტილი, რომელშიც მოითხოვება სასაზღვრო პირობის შესრულება, მაშინ (1.58) წარმოადგენს უცნობი

კოეფიციენტების მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემის ამოხსნით განისაზღვრება  $a_n^{in}$  და  $a_n^{out}$  კოეფიციენტები, და უცნობი გაბნეული ველი შეიძლება გამოითვალოს (1.56) და (1.57) ფორმულების საშუალებით. ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, დ.გ. მეთოდით (1.56) და (1.57) მიახლოებითი ამოხსნა მიისწრაფის ჭეშმარიტისკენ კოლოკაციის წერტილების რაოდენობის გაზრდით [15, 16, 17].

ველის წარმოსადგენად ფუნქციის არჩევის შემდეგ საჭიროა ავირჩიოთ გაშლის კოეფიციენტების განსაზღვრის ოპტიმალური მეთოდი. ამ მიზნით გამოკვლეული იყო სხვადასხვა მეთოდი: ორთოგონალიზაციის მეთოდი, უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, კოლოკაციის მეთოდი და სხვა [18]. გამოკვლევებმა უჩვენეს, რომ გაშლის კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის ყველაზე ოპტიმალურია კოლოკაციის მეთოდი, რომლის თანახმადაც სასაზღვრო პირობის შესრულება მოითხოვება გამბნევი სხეულის ზედაპირზე სასრული რაოდენობის კოლოკაციის წერტილებში. ამ მეთოდით დამხმარე გამომსხივებლების ამპლიტუდებისა და ფაზების მნიშვნელობების განსაზღვრა დაიყვანება წრფივი ალგებრული განტოლებების, ზოგად შემთხვევაში მართკუთხა სისტემის ფსევდო ამონახსნების პოვნაზე. ასეთ შემთხვევაში სისტემას გააჩნია მინიმალური ზომები და მარტივი მატრიცული ელემენტები. როცა კოლოკაციის წერტილების რაოდენობა დამხმარე გამომსხივებლების რაოდენობის ტოლია, მაშინ სასაზღვრო პირობა ზუსტად სრულდება მხოლოდ კოლოკაციის წერტილებში. ხოლო თუ კოლოკაციის წერტილების რაოდენობა მეტია დამხმარე გამომსხივებლების რაოდენობაზე, მაშინ შესაბამისი სისტემის ამოხსნა იქნება საუკეთესო საშუალო კვადრატულ მიახლოებაში. სხვა მეთოდებისგან განსხვავებით კოლოკაციის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს: დავიყვანოთ ამოცანის ამოხსნა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე, რომელიც მოითხოვს მინიმალურ მანქანურ დროს; ამოვხსნათ თითქმის ნებისმიერი ფორმისა და სირთულის მქონე ზედაპირებზე დიფრაქციის ამოცანები [19-24].

სამგანზომილებიან სტრუქტურებზე დიფრაქციის ამოცანების ამოხსნისას დ.გ.მ.-ის გამოყენებით ფუნდამენტურ ამონახსნელად  $U_n(|r_n - r|)$  ანუ ბაზისურ ფუნქციებად (1.54)-ში ვირჩევთ  $p$  დიპოლური მომენტის მქონე

ჰერცის დიპოლის ველს, რომლის ელექტრული და მაგნიტური დაძაბულობის ვექტორები ანალიზურად შემდეგნაირად გამოისახება [25]:

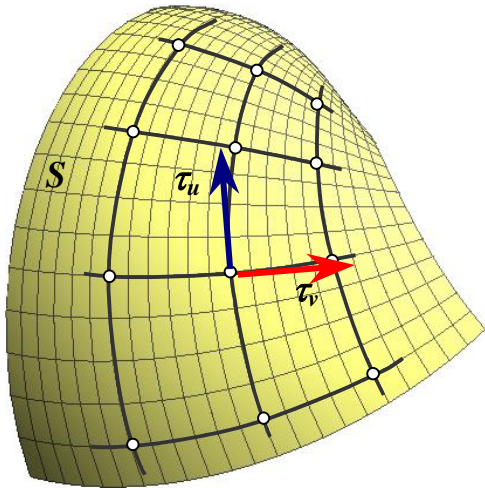
$$E(\mathbf{R}_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{1}{R_n^3} (3\mathbf{R}_n^0(\mathbf{R}_n^0, \mathbf{p}) - \mathbf{p}) - \frac{ik}{R^2} (3\mathbf{R}_n^0(\mathbf{R}_n^0, \mathbf{p}) - \mathbf{p}) - \frac{k^2}{R} [\mathbf{R}_n^0[\mathbf{R}_n^0, \mathbf{p}]] \right\} \quad (1.59)$$

$$H(\mathbf{R}_n) = -\frac{i\omega}{4\pi} e^{-i\omega t} \left( \frac{1}{R_n^2} - \frac{ik}{R_n} \right) [\mathbf{p}, \mathbf{R}_n^0] \quad (1.60)$$

სადაც  $\mathbf{R}_n^0 = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}_n}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_n|}$ .

კარგადაა ცნობილი, რომ დ.გ.მ.-ის ეფექტურობა დამოკიდებულია რამდენიმე დამხმარე პარამეტრის მნიშვნელობაზე. მათ შორის ერთერთ ყველაზე კრიტიკულ პარამეტრს წარმოადგენს გამბნევი სხეულის ზედაპირიდან დამხმარე ზედაპირამდე მანძილი. საზოგადოდ, რაც უფრო დიდია ეს მანძილი, ანუ რაც უფრო მეტადაა დაშორებული სხეულის ზედაპირიდან დამხმარე ზედაპირი, ამოხსნა მით უფრო უკეთესი მიიღება. ბოლო წლების განმავლობაში რიცხვითი ექსპერიმენტების გამოცდილებამ აჩვენა, რომ არსებობს დამხმარე ზედაპირის არჩევის გარკვეული წესები. ერთ-ერთი საინტერესო მოვლენა დამზერილი იყო დ.გ.მ.-ით ტალღამტარების თვისებების შესწავლისას. აღმოჩენილ იქნა ე.წ. კონტურული რეზონანსის ეფექტი [27, 28], რომელიც დ.გ.მ.-ში ძალზედ იშვიათად თავს იჩენს გარკვეულ სიხშირეებზე. ამ სიხშირეებზე დამხმარე გამომსხივებლები რეზონირებენ ერთმანეთთან. გაბნეულ ველს ზედ ედება დამხმარე კონტურის საკუთარი ველი. ამ ეფექტის აღმოჩენა ორგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნისას მოხდა, სადაც დამხმარე ზედაპირი ჩაკეტილ კონტურს წარმოადგენდა, სწორედ აქედან მან მიიღო თავისი სახელწოდება – კონტურული რეზონანსი. ამ მოვლენის თავიდან ასაცილებლად საკმარისია მოცემული სიხშირისთვის შეიცვალოს დამხმარე ზედაპირის ფორმა, რაც გამოიწვევს გაბნეულ ველზე ზედდებული კონტურის საკუთარი ველის გაქრობას. მეორე მეტად მნიშვნელოვანი წესი დამხმარე ზედაპირების არჩევისა აღმოჩენილი იყო შებრუნებული ამოცანების შესწავლისას. შებრუნებული ამოცანა გულისხმობს სხეულის მიერ გაბნეული ველის ანალიზური გაგრძელების აღდგენით სხეულის

ფორმისა და ადგილმდებარეობის დადგენას. აღმოჩნდა, რომ, თუ დამხმარე ზედაპირი არ მოიცავს გაბნეული ველის ანალიზური გაგრძელების ყველა განსაკუთრებულობებს (სხეულის შიდა არეში), მაშინ დამხმარე კონტურით გაბნეული ველის აღწერა შეუძლებელია. ამოცანის ამოხსნა არ არის კორექტული და კრებადი [26, 27, 28].



სურ. 6

კოლოკაციის წერტილები და  
ზედაპირის ტანგენციალური  
ვექტორები

გეომეტრიულ სხეულებზე. ზემოთ აღნიშნული სტრუქტურებისგან განსხვავებით, შედარებით მარტივი ფორმის სხეულებზე, რომელთა ზედაპირები გლუვი და ჩაკეტილი ფორმისაა, შეიძლება მივაღწიოთ ამოცანის ამოხსნის კრებადობას შედარებით მცირე რაოდენობის დიპოლების დახმარებით. ასეთ სხეულებზე დიფრაქციის ამოცანის ამოხსნისას დ.გ.მ.-ის გამოყენებით შესაძლებელია დამხმარე ზედაპირის შეწვევა სხეულის შიგნით, რაც საშუალებას იძლევა ნაკლები რაოდენობის დამხმარე გამომსხივებლების გამოყენებით დასაშვები სიზუსტით აღვწეროთ გაბნეული ველი. ველის წარმოსადგენად ფუნქციის არჩევის შემდეგ, ვირჩევთ გაშლის კოეფიციენტების განსაზღვრის მეთოდს, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში წარმოადგენს კოლოკაციის მეთოდს. სამგანზომილებიანი ამოცანების შემთხვევაში სასაზღვრო პირობის შესრულება მოითხოვება გამბნევი სხეულის ზედაპირზე კოლოკაციის წერტილებში  $\tau_u$  და  $\tau_v$  ზედაპირის ტანგენციალური ვექტორების მიმართულებით, რომლებიც წარმოადგენენ

თხელ სტრუქტურებზე სადაც დამხმარე ზედაპირი მოთავსებულია გამბნევი სხეულის ზედაპირთან ახლოს, ამოცანის დასაშვები სიზუსტით ამოხსნისთვის საჭირო ხდება დამხმარე გამომსხივებლების დიდი რაოდენობით გამოყენება. ამ შემთხვევაში ელექტრონული გამომთვლელი მანქანების რესურსების

სიმცირის გამო ასეთი სახის ამოცანათა ამოხსნა დ.გ.მ.-ით ვერ ხერხდება. მეთოდი მოითხოვს გაუმჯობესებას, რათა ამოხსნას დიფრაქციის ამოცანები უფრო რთულ



ბაზისს ამ წერტილის მხებ ვექტორთა სიბრტყეში (სურ. 6). შესაბამისად დამხმარე გამომსხივებლებს, რომლებიც მოთავსებულნი იქნებიან დამხმარე ზედაპირებზე ექნებათ ამ ვექტორების პარალელური დიპოლური მომენტები. სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისას თუ  $N$  ზედაპირზე ავირჩევთ  $N$  რაოდენობის კოლოკაციის წერტილს, დიელექტრიკული სხეულის შემთხვევაში მივიღებთ  $4N \times 4N$  ზომის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, ხოლო მეტალური სხეულისათვის -  $2N \times 2N$ . სასაზღვრო პირობები (1.47) და (1.58) შესაბამისად მეტალური და დიელექტრიკული ზედაპირების შემთხვევაში, ჩაიწერება როგორც  $\tau_u$  ასევე  $\tau_v$  ტანგენციალური მდგენელებზე. დ.გ.მ.-ში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება  $(\tau_u, \tau_v)$  ბაზისური ვექტორების არჩევას. სასურველია მათი ორიენტაცია წინასწარ განსაზღვრული იყოს ამოცანის ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე. კერძოდ, წინასწარ იქნეს დადგენილი სხეულის ზედაპირზე დიფრაქციის შედეგად ინდუცირებული დენების დინების უპირატესი მიმართულებები, სასურველია კოლოკაციის წერტილებში ბაზისური ვექტორების ორიენტაცია არჩეულ იქნას ამ უპირატესი მიმართულების თანხვედნილად. ასეთ შემთხვევაში მარტივდება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის მატრიცის სახე და შესაბამისად იზრდება ამოცანის ამოხსნის სიზუსტე. ამგვარად, როგორც ამ მიმოხილვიდან ჩანს ჩაკეტილი ზედაპირებისთვის დ.გ.მ. წარმოადგენს სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ეფექტურ და ძლიერ მეთოდს. გაბნეული ველის ანალიზური გაგრძელების გათვალისწინება მეთოდს ფართო შესაძლებლობებს უხსნის. მეორეს მხრივ რთული გეომეტრიული ფიგურებისთვის მეთოდი საჭიროებს განვითარებას და სრულყოფას [19].

### §3.4 მომენტების მეთოდი - Method of Moments (MoM)

ახლა განვიხილოთ ზოგადი პროცედურა წრფივი სისტემების ამოსახსნელად - მომენტების მეთოდი (Method of Moments) [4].

განვიხილოთ განზოგადოებული ამოცანა:

$$L(f) = g, \quad (1.61)$$

სადაც  $L$  წრფივი ოპერატორია,  $g$  - ცნობილი, ხოლო  $f$  - უცნობი ფუნქცია. ახლა  $L$  ბაზისში გამოვსახოთ  $f$  ფუნქცია  $f_1, f_2, f_3 \dots$  ფუნქციების ჯამის სახით:

$$f = \sum_n a_n f_n, \quad (1.62)$$

სადაც  $a_n$  წონითი ფუნქციების უცნობი კოეფიციენტებია. იმის გამო, რომ  $L$  წრფივია, (1.62) გამოსახულების (1.61) გამოსახულებაში ჩასმისას მივიღებთ:

$$\sum_n a_n L(f_n) = g. \quad (1.63)$$

განვაზოგადოთ მეთოდი, რომლის მეშვეობით სასაზღვრო პირობები დამუშავდება. ჩვენ განსაზღვრავთ სკალარული ნამრავლი ბაზისური ფუნქციის  $r$  და წონითი ფუნქციის  $f_m(r)$ :

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_{f_m} f_m(r) \int_{f_n} f_n(r') dr' dr \quad (1.64)$$

აქ ინტეგრალები არიან წრფივი, ზედაპირული ან მოცულობითი, რაც დამოკიდებულია ბაზისურ და ტესტურ ფუნქციებზე. ახლა კი სკალარულად გავამრავლოთ ყოველი ტესტური ფუნქცია ნაშტზე. შედეგად მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\sum_n a_n \langle f_m, L(f_n) \rangle = \langle f_m, g \rangle, \quad (1.65)$$

სადაც

$$A_{mn} = \langle f_m, L(f_n) \rangle, \quad x_n = a_n, \quad b_m = \langle f_m, g \rangle. \quad (1.66)$$

აღნიშვნების შეტანით, მივიღებთ მატრიცულ განტოლებას

$$Ax = b \quad (1.67)$$

## მოდელირება და შედეგები

პირველ რიგში, ჩვენ ი. დასის მეთოდით დავამოდელირეთ ერთი ხვიისგან შემდგარი კოჭის ელექტრული და მაგნიტური ველები ღია სივრცეში. მოდელირებისთვის გამოვიყენეთ პროგრამული პაკეტი MATLAB [44]. მიღებული შედეგები მოყვანილია დანართში, სურათებზე 1-8. მოდელირების პროგრამული კოდი მოყვანილია დანართში (პროგრამული კოდი 1).

იგივე ამოცანა დავამოდელირეთ სხვა მეთოდების გამოყენებით, კერძოდ კი პროგრამულ პაკეტში EMCoS Studio [45] და C++ პროგრამულ ენაზე Visual Studio [46] პროგრამულ პაკეტში დაწერილ MoM მეთოდის საშუალებით. ი. დასის მეთოდის შესამოწმებლად შევადარეთ ერთმანეთს სხვადასხვა მეთოდით მიღებული შედეგები. შედარების ნახაზები მოყვანილია დანართში სურათებზე 9-13.

ამის შემდეგ მოდელირებაში დავამატეთ ნიადაგი. ნიადაგის არსებობისას მიღებული შედეგები მოყვანილია დანართში სურათებზე 14-23. მოდელირების პროგრამული კოდი მოყვანილია დანართში (პროგრამული კოდი 2).

მოდელირებისას ველების გამოსახულებებში (1.39 – 1.45) არსებული ინტეგრალი შევცვალეთ ჯამად. ჯამის ზედა საზღვრად ავირჩიეთ მნიშვნელობა 600.

$$\int_0^{\infty} \rightarrow \sum_0^{600} \quad (2.1)$$

ჯამის კრებადობა ნაჩვენებია დანართში სურათებზე 24-49.

ასევე დავამოდელირეთ GEM3 ტიპის სენსორი, რომელიც შედგება ორი კოჭისაგან. GEM3 ტიპის სენსორები ხშირად გამოიყენება დეტექტორულ სისტემებში. მიღებული რეზულტატები ნაჩვენებია სურათებზე 50-55.

## დასკვნა

სამაგისტრო ნაშრომის ფარგლებში სხვადასხვა პროგრამული ხელსაწყო და ენის მეშვეობით დაიწერა რამოდენიმე პროგრამული პაკეტი. პროგრამული პაკეტების მთავარი იდეა არის სხვადასხვა მეთოდის გამოყენებით ნიადაგში ელექტრომაგნიტური ველით გამოწვეული გრიგალური დენების მოდელირება და შესწავლა. ჩვენს მიერ დაწერილი პროგრამული პაკეტების გამოყენებით დავამოძღვრეთ ნიადაგში ელექტრომაგნიტური ველების და გრიგალური დენების განაწილება. გამოვიტანეთ დასკვნა, რომ შესაძლებელია ნიადაგში არამეტალური ობიექტის დეტექტირება მაღალსიხშირულ ელექტრომაგნიტურ დიაპაზონში. შემდგომი ამოცანები შეიძლება იყოს: მაღალსიხშირულ დიაპაზონში ნიადაგის პარამეტრების დადგენა; ელექტრომაგნიტური ველების და გრიგალური დენების მოდელირება ნიადაგში მასში არამეტალური ობიექტის არსებობისას; ფიზიკური სენსორების შექმნა ნიადაგში არამეტალური ობიექტების (ნაღმების) დეტექტირებისთვის. არსებულ ამოცანებზე მუშაობა შესაძლებელია სადოქტორო ნაშრომის ფარგლებში.

---

## გამოყენებული ლიტერატურა

---

1. დ. კაკულია - ღია მეტალური ზედაპირების სიხშირული მახასიათებლების შესწავლა დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდით [2002]
2. ვ. ტაბატაძე - დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდის გამოყენება შებრუნებული ამოცანებისა და ფოტონური კრისტალების კომპიუტერული მოდელირებისთვის [2008]
3. Y. Das – A Preliminary Investigation of the Effects of Soil Electromagnetic Properties on Metal Detectors [2004]
4. R. F. Harrington – Field Computation by Moment Methods
5. J. D. Corbett, M. N. Nabighian, G. V. Keller, G. J. Palacky, S. H. Ward, G. W. Hohmann - Electromagnetic Methods in Applied Geophysics – Theory [1988 – 2008]
6. Shamatava – “Subsurface metallic targets detection and classification using low frequency electromagnetic fields” [2015]
7. S. Grant, B. E. Barrowes, F. Shubitidze – “Detection of buried conductive nonmetallic targets by electromagnetic induction” [2012]
8. MATLAB Documentation (<https://www.mathworks.com/help/matlab/>) [2018]
9. Р. Митры ,”Вычислительные методы в электродинамике.” из.МИР Москва 1997. 18-19с.
10. R. Zaridze, G. Bit-Babik, D. Karkashadze, R. Jobava, D. Economou and N. Uzunoglu. "The Method of Auxiliary (MAS) Sources, Solution of propagation, Diffraction and Inverse Problems using MAS. Institute of Communication and Computers Systems," Athens, Greece, 1998, pp. 52.
11. Kupradze V. About approximates solution of mathematical physics problem. Success of Mathematical Sciences, Moscow. 22. N2 1967, 59-107.
12. D. Karkashadze, R. Zaridze, "The Method of Auxiliary Sources in Applied Electrodynamics", Latsis Symposium, Zurich, 1995, pp. 163-180.
13. Karkashadze D.D., Metshvarishvili D.A., Shubitidze P.I Applied Program Product Based on the Auxiliary Sources Method. Proceedings of the Seminar/

- Workshop "Numerical Solution of Direct and Inverse Problems of the Electromagnetic and Acoustic Waves Theory (DIPED-95)" Supported by IEEE. Lviv, Ukraine, Sept. 19-25 21, 1995. pp. 43-44.
14. Kopaleishvili V.P., Popovidi-Zaridze R.S. 1972 Radioeng. and Electr. Acad. of Scie USSR. Nauka v.27, N11, 2432-2435.
  15. Popovidi-Zaridze R. S. Karkashadze D. D., Khatiashvili J. 1981. Radioeng. and Electr. Acad. of Scie USSR. Nauka, v.36, N2, 254-262 pp.
  16. Popovidi-Zaridze. R. S., Tsverikmazashvili Z. S. "Numerical solution of diffraction problem by modified method of non-orthogonal series," Journal of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Moscow, 1977.
  17. Popovidi-Zaridze R.S., Karkashadze D. D, Mtiulishvili K. A. Solution of the diffraction problems on the complicate shape body by method of composition. 7th All union Symposium of Diffraction and Wave Propagation. 1977, Moscow. v.3, 83-85 pp.
  18. Алексидзе М.А. "Фундаментальные функции уравнений математической физики в приближенных решениях граничных задач" часть I. Изд. ТУ Тбилиси 1989. с 158-179.
  19. Bogdanov F.G., Zaridze R.S., Karkashadze D.D., Shubitidze Ph.L Modified Auxiliary Sources Method for Investigation of Diffraction on the Volominous Bodies of Complicated Form. "MMET'96 VI-th International Conference in Mathematical Method in Electromagnetic Theory". Proceedings. September 10-13, 1996, Lviv, Ukraine pp. 65-69.
  20. R. Popovidi-Zaridze, G. Talakvadze, "Numerical Investigation of Resonant Properties of Metal-Dialectical Periodical Structures," Tbilisi State University, Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, 1983.
  21. R. Popovidi-Zaridze., D. Karkashadze, G. Ahvlediani, and J. Khatiashvili, "Investigation of Possibilities of the Method of Auxiliary Sources in Solution of two-dimensional Electrodynamics Problems," Radiotechnics and Electronics, Vol. 22, No.2, Moscow, 1978.
  22. R. Popovidi-Zaridze, "The Method of Auxiliary Sources," Lecture Cycles, Academy of Science, Moscow. 1984.
  23. R. Zaridze, G. Bit-Babik, K. Tavzarashvili, A. Bijamov, D. Kakulia,

- G. Ghvedashvili. "The Method of Auxiliary Sources in Scattering and Diffraction Problems" is presented on 2001 IEEE AP-S International Symposium, Boston, Massachusetts, July 8-13, 2001. pp.738-741
24. R. Zaridze, **D. Kakulia**, K. Tavzarashvili, A. Bijamov, G. Ghvedashvili, G. Chelidze, "Electrodynamic Properties of Semi-open Objects with Cavities and Partitions", Proceedings of VIth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2001), Lviv, Ukraine, September 18-20, 2001, pp. 54-59.
25. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.
26. R. Zaridze, G. Bit-Babik, K. Tavzarashvili. "Analysis of the Scattered Field Singularities for Optimizing the Inverse Problems Solution". Proceedings of International Seminar/Workshop organized by Ukraine MTT/ED/AP *IEEE* chapter "Numerical Solution of Direct and Inverse Problems of the Electromagnetic and Acoustic Waves Theory (DIPED-97)". Lviv, Ukraine, Sept. 15-17, 1997 pp. 20-22. ISBN 966-02-0296-2.
27. R. Zaridze, G. Bit-Babik, D. Karkashadze, R. Jobava, D. Economou and N. Uzunoglu. "The Method of Auxiliary (MAS) Sources, Solution of propagation, Diffraction and Inverse Problems using MAS. Institute of Communication and Computers Systems," Athens, Greece, 1998, pp. 52.
28. Zaridze R. Karkashadze D. Khatiashvili J. Method of Auxiliary Sources for investigation of along-regular waveguides 1985 Tbilisi State University 150 p.
29. GPR - [https://en.wikipedia.org/wiki/Ground-penetrating\\_radar](https://en.wikipedia.org/wiki/Ground-penetrating_radar)
30. EMI - [https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic\\_induction](https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_induction)
31. Skin Effect, Skin Depth - [https://en.wikipedia.org/wiki/Skin\\_effect](https://en.wikipedia.org/wiki/Skin_effect)
32. UXO - [https://en.wikipedia.org/wiki/Unexploded\\_ordnance](https://en.wikipedia.org/wiki/Unexploded_ordnance)
33. G. Cross – "Soil properties and GPR detection of landmines – a basis for forecasting and evaluation of GPR performance"
34. W. L. Gans, R. G. Geyer and W. K. Klemperer – "Suggested methods and standards for testing and verification of electromagnetic buried objects detectors", NISTIR 89-3915R, National Institute of Standards and Technology, U.S. Department of Commerce, March 1990. DTIC AD-A226 626
35. R. Thompson and F. Oldfield – "Environmental Magnetism", Allen and Unwin,

Londong, 1989

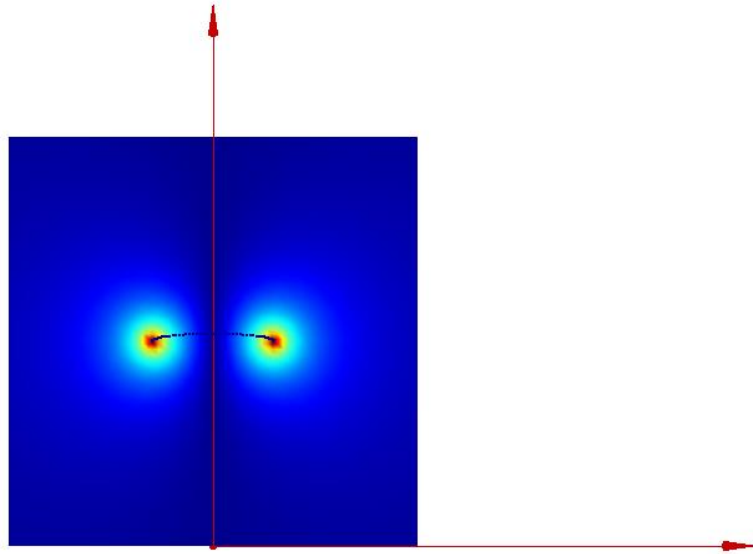
36. C. E. Mullins – “Magnetic susceptibility of the soil and its significance in soil science – a review”, *Journal of soil science* 28, pp. 223-246, 1977
37. G. R. Olhoeft – “Time dependent magnetization and magnetic loss tangents”, Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, May 1972
38. C. E. Mullins and M. S. Tite – “Magnetic viscosity, quadrature susceptibility, and frequency dependence of susceptibility in single-domain assemblies of magnetite and maghmite”, *Journal of Geophysical Research* 78, pp. 804-809, February 1973
39. M. Dabas and J. R. Skinner – “Time-domain magnetization of soils (VRM), experimental relationship to quadrature susceptibility”, *Geophysics* 58, pp. 326-333, March 1993.
40. L. R. Pasion, S. D. Billings and D. Oldenburg – “Evaluating the effects of magnetic soils on TEM measurements for UXO detection”, in *Proceedings of the UXO/Countermining Forum*, Orlando, Florida, September 2002
41. S. D. Billings, L. R. Pasion, D. W. Oldenburg and J. Foley – “The influence of magnetic viscosity on electromagnetic sensors”, in *International Conference on Requirements and Technologies for the Detection, Removal and Neutralization of Landmines and UXO*, September 2003
42. Глазунов В.В. Принципы моделирования и интерпретаций потенциальных геофизических полей скрытых археологических объектов. Докторская диссертация. СанктПетербург. 1997.
43. ლ. შოშიაშვილი - ანტენები და ელ.მაგნიტური ტელდების გავრცელება [2015]
44. MATLAB - <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
45. EMCoS Studio - <https://www.emcos.com/?products=emcos-studio>
46. Visual Studio - <https://visualstudio.microsoft.com/>



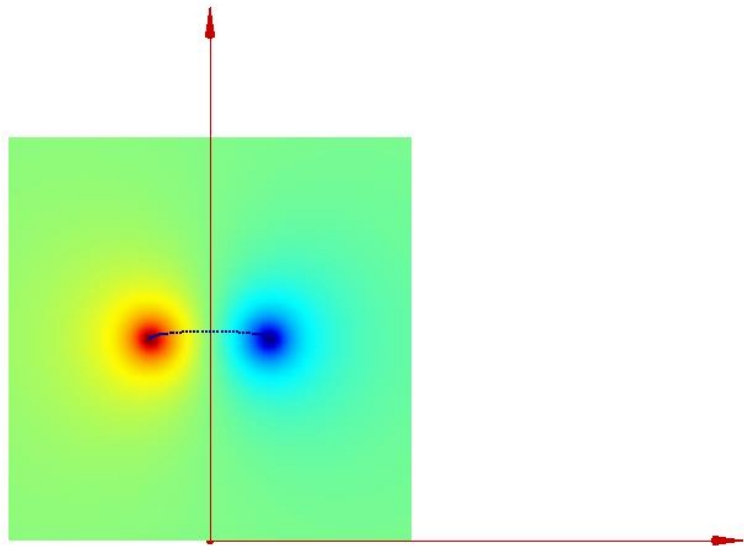
---

# დანართი

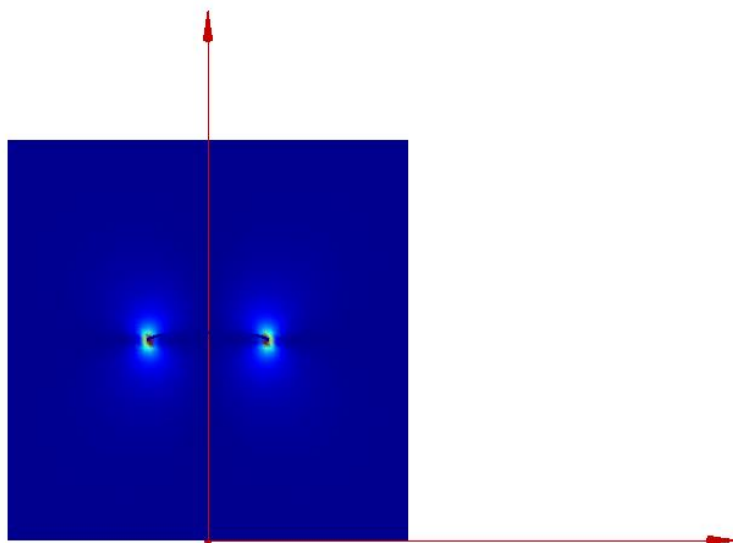
---



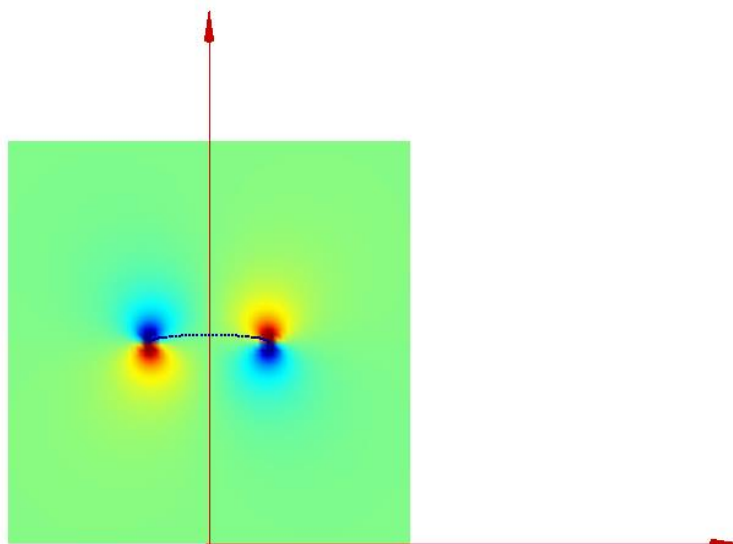
სურათი 1



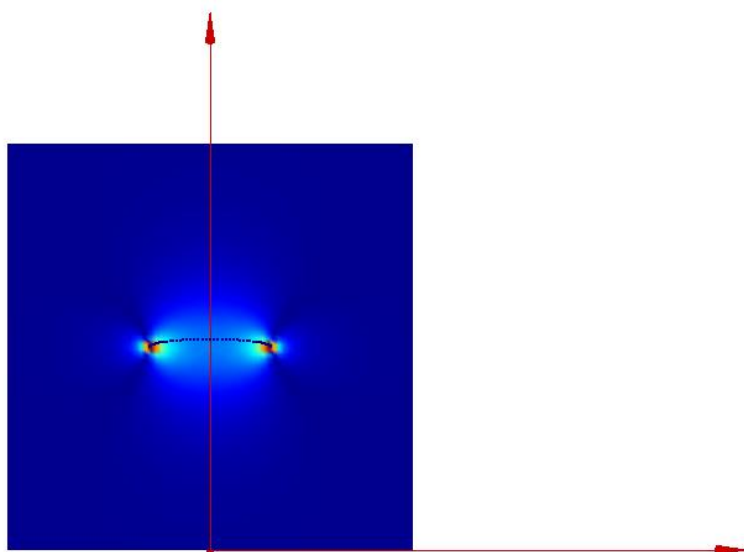
სურათი 2



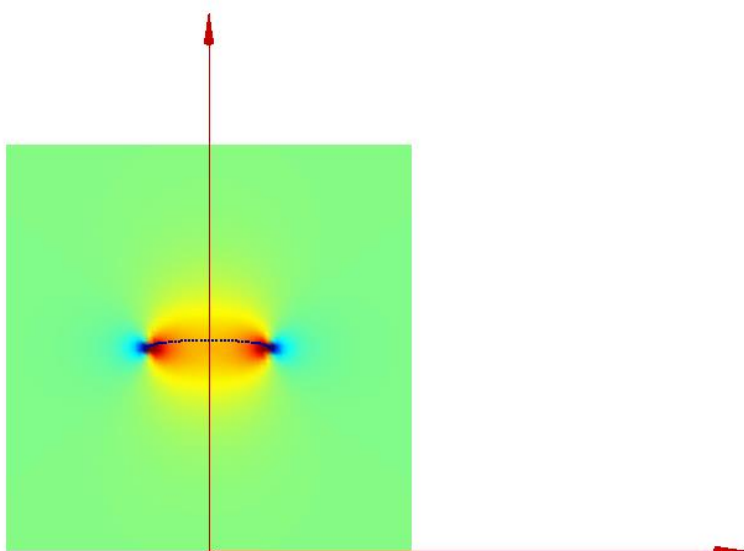
სურათი 3



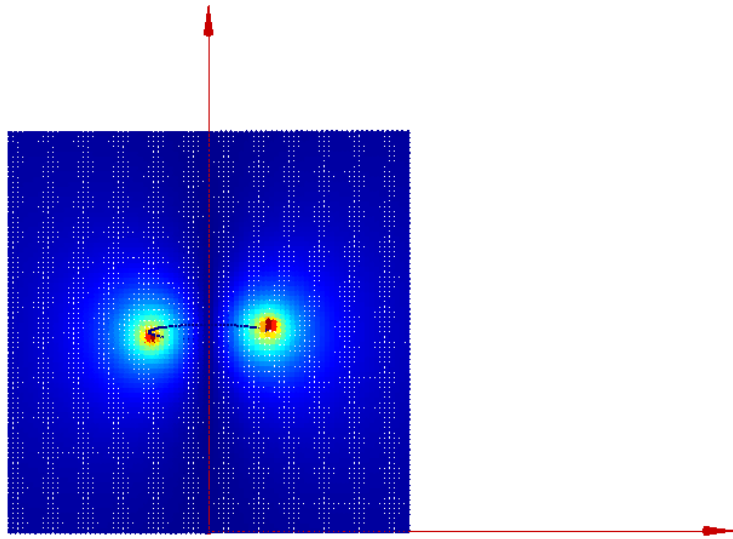
სურათი 4



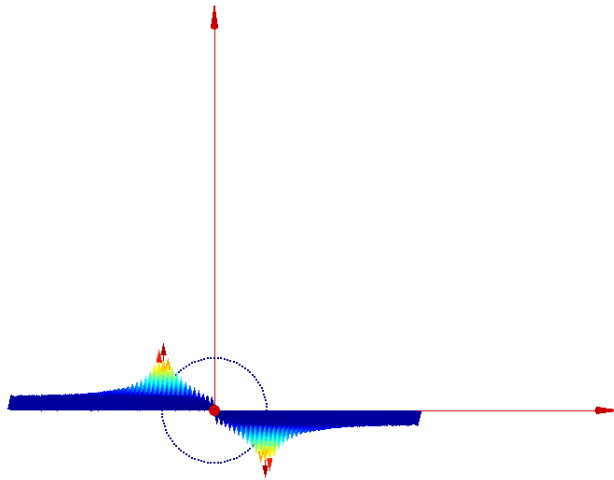
სურათი 5



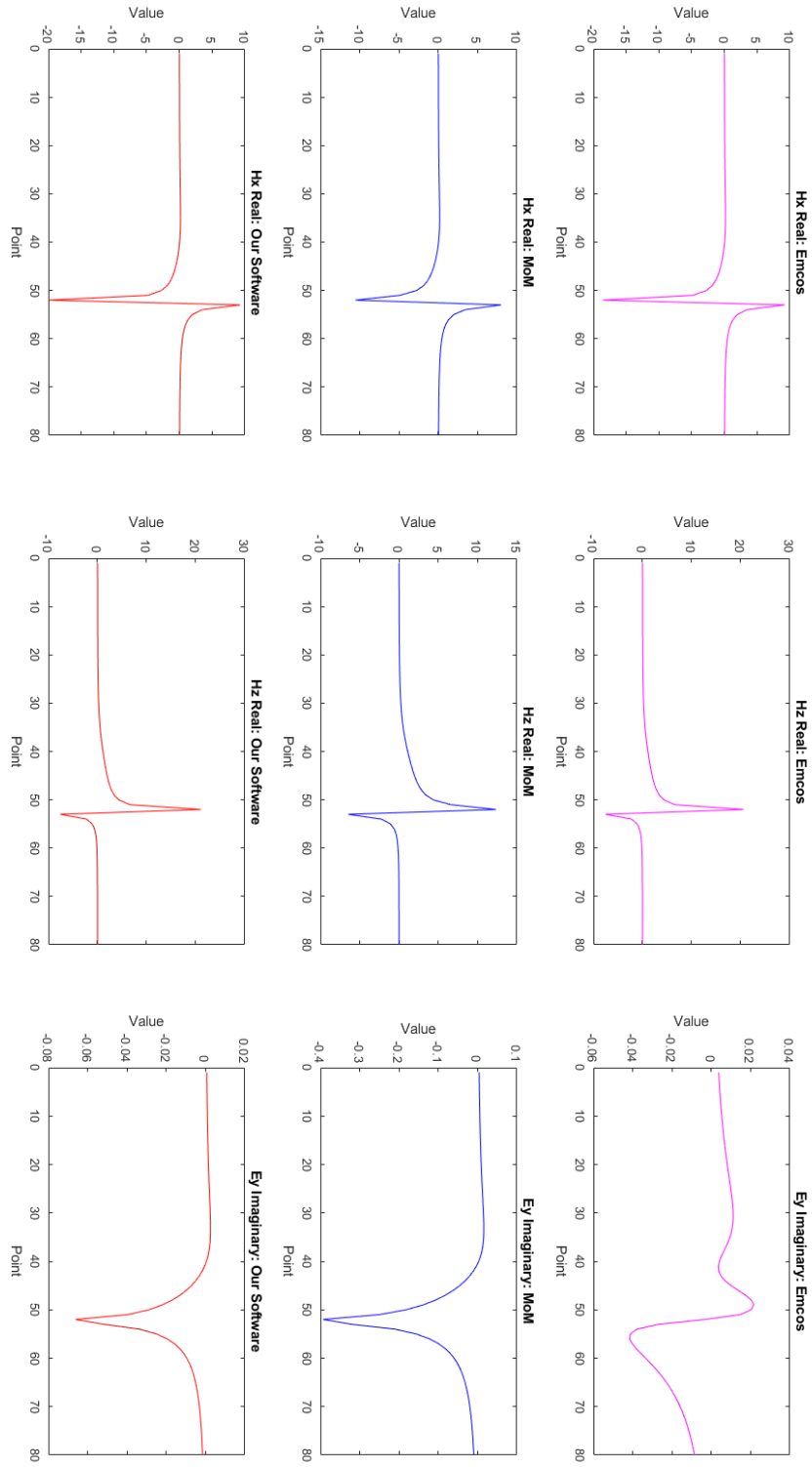
სურათი 6

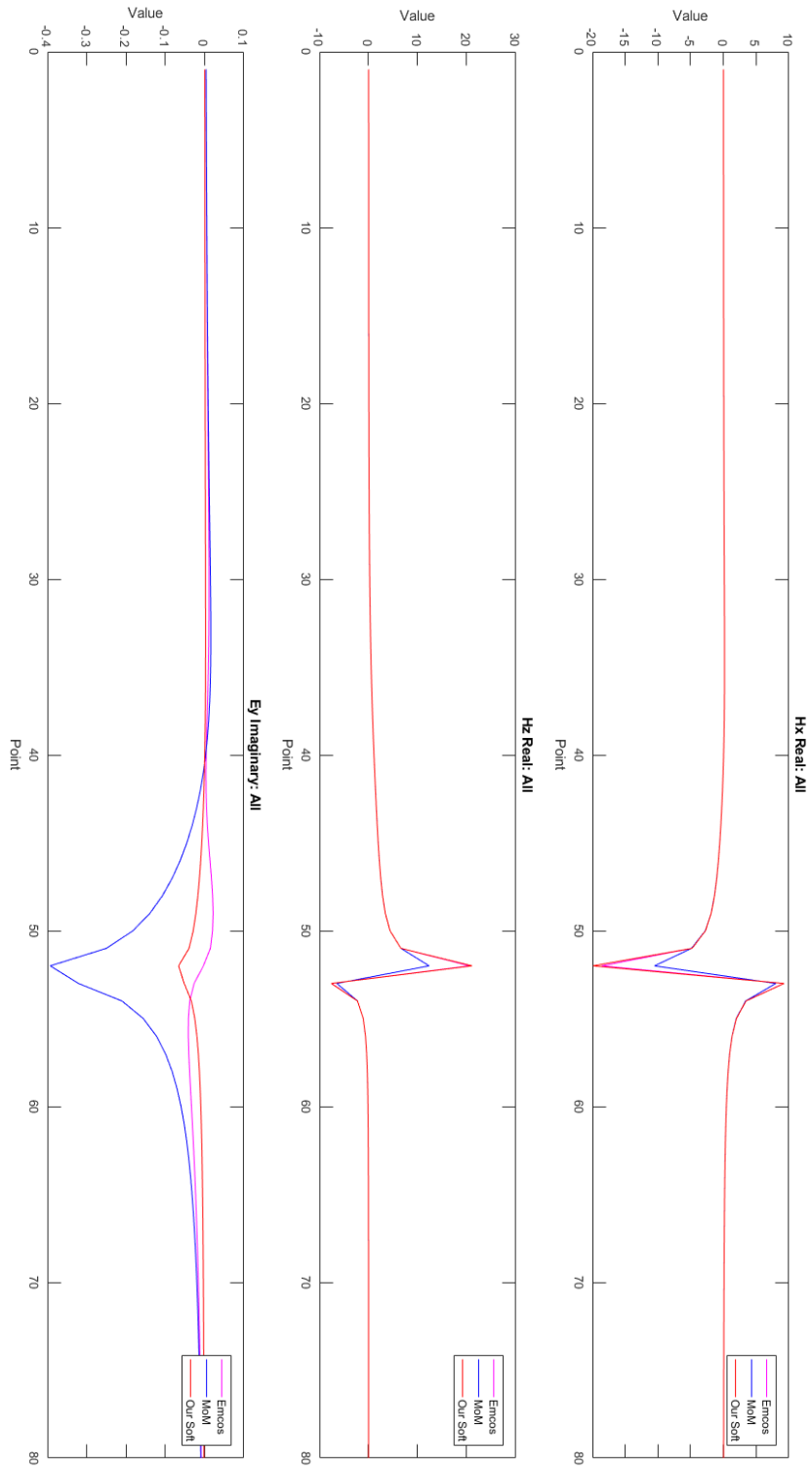


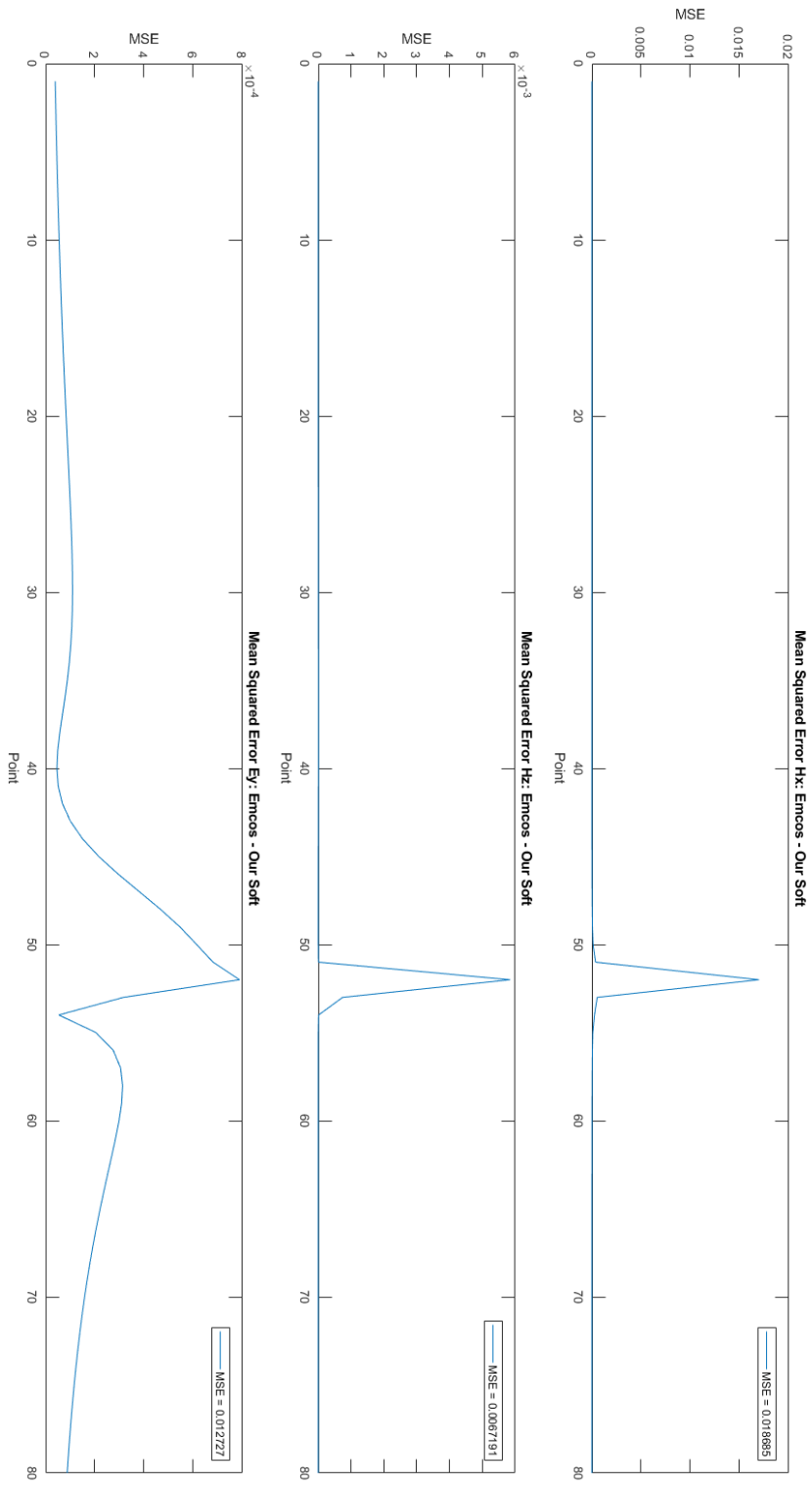
სურათი 7

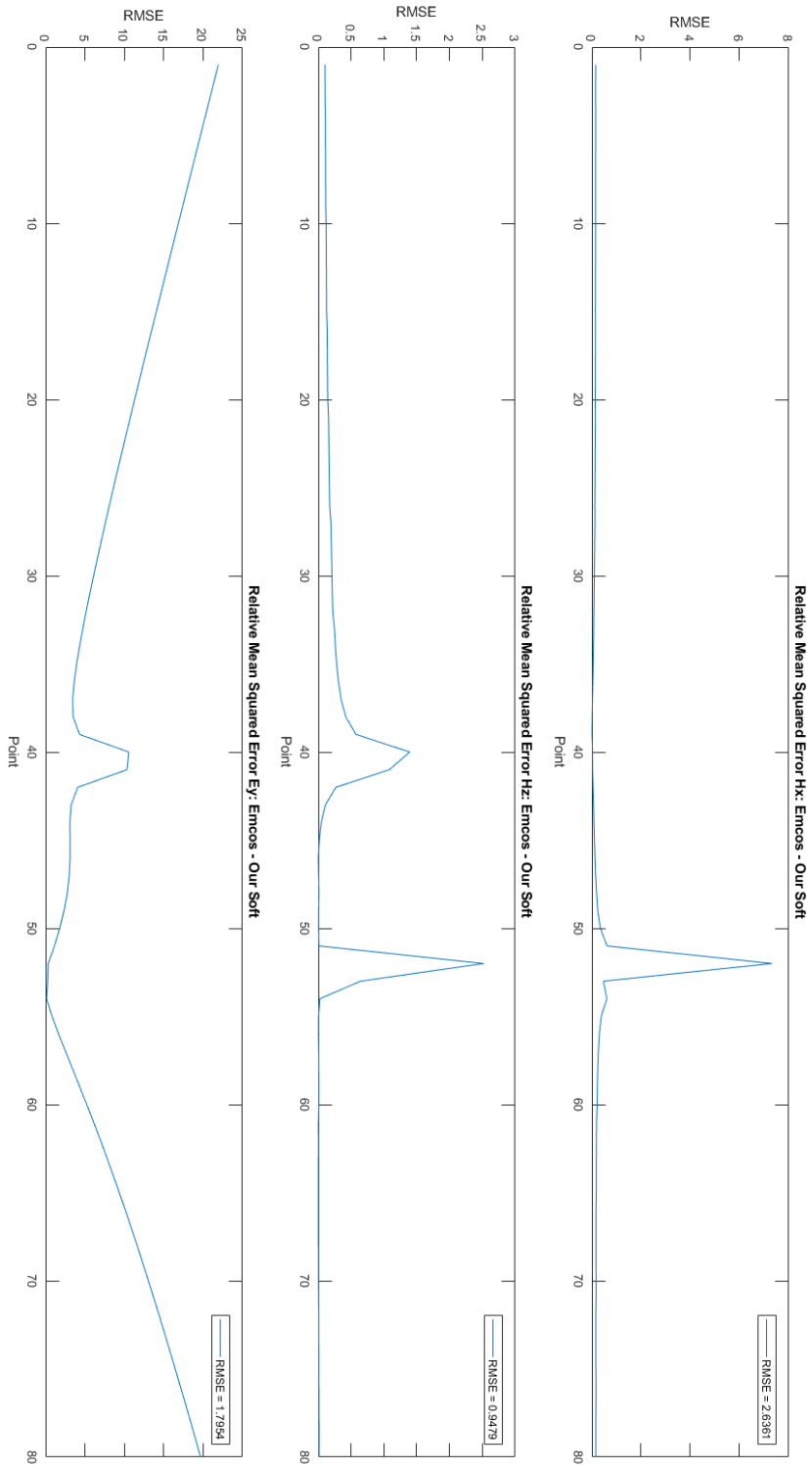


სურათი 8

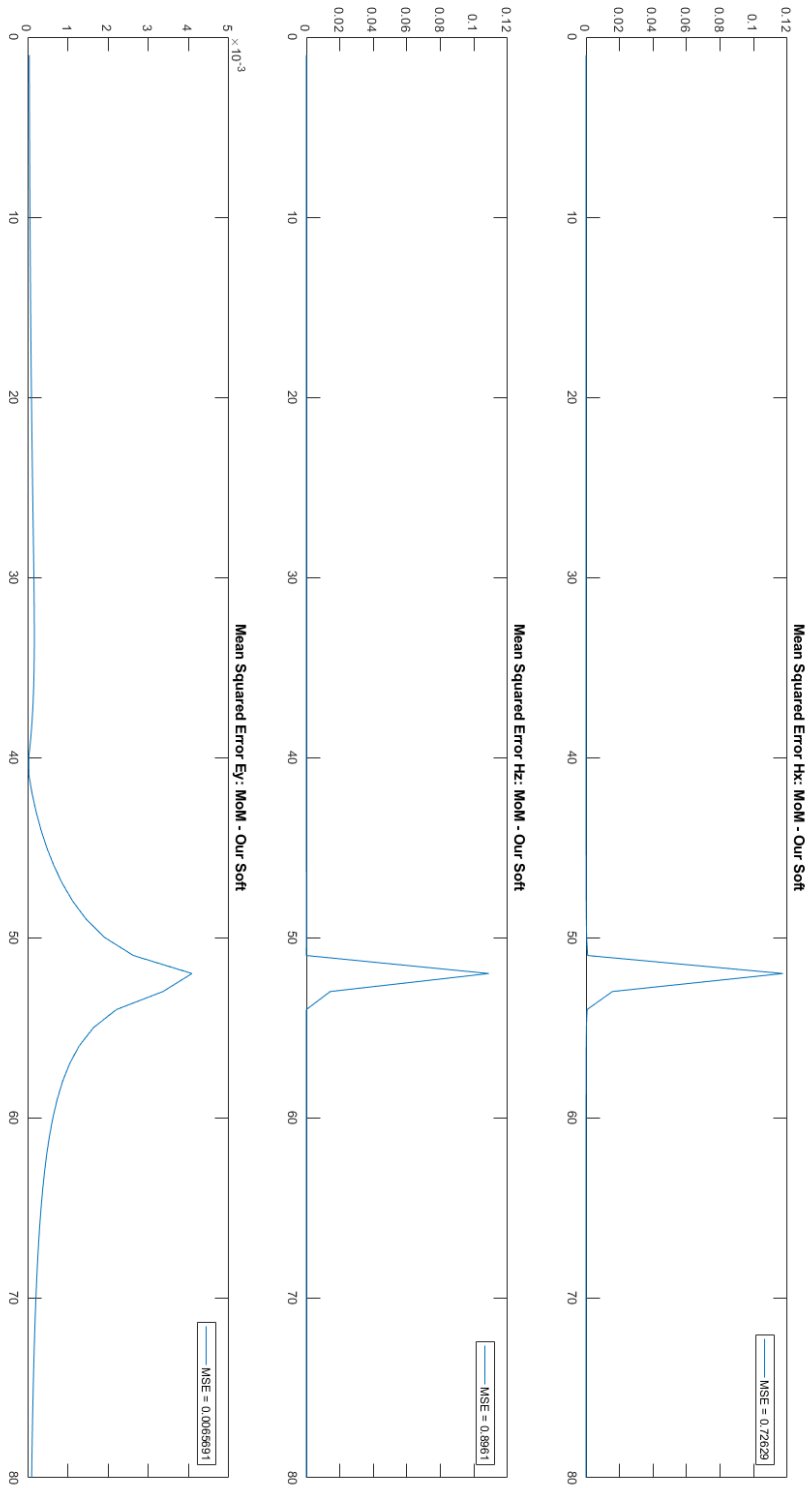


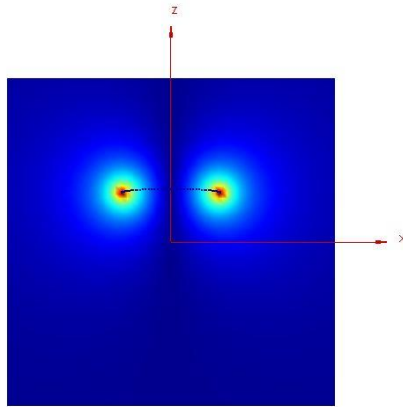




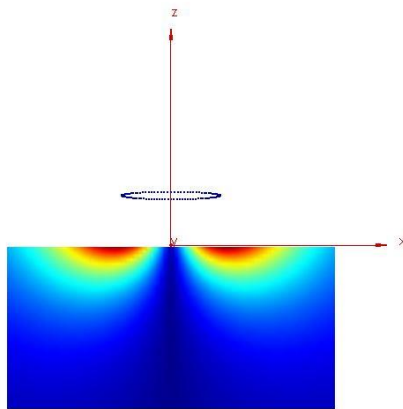




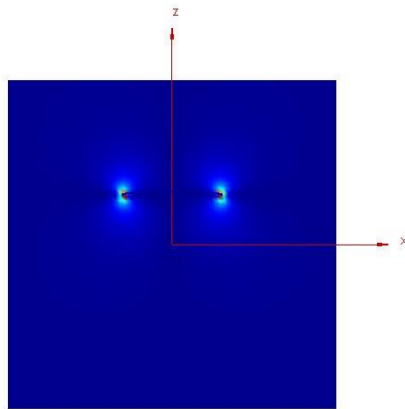




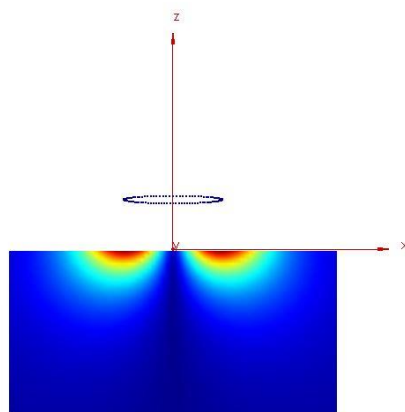
სურათი 14



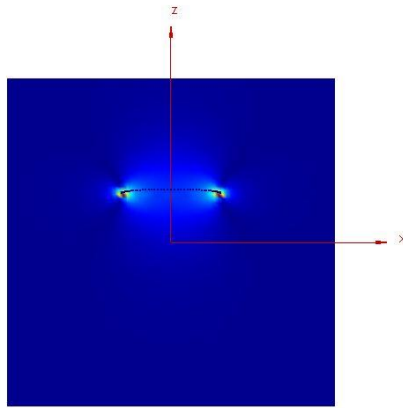
სურათი 15



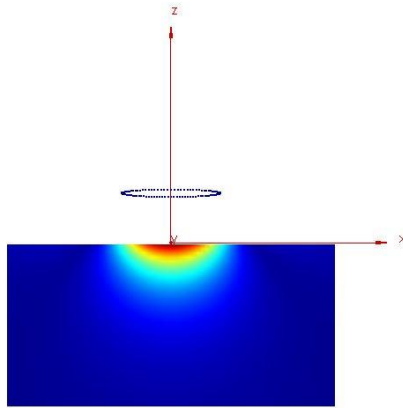
სურათი 16



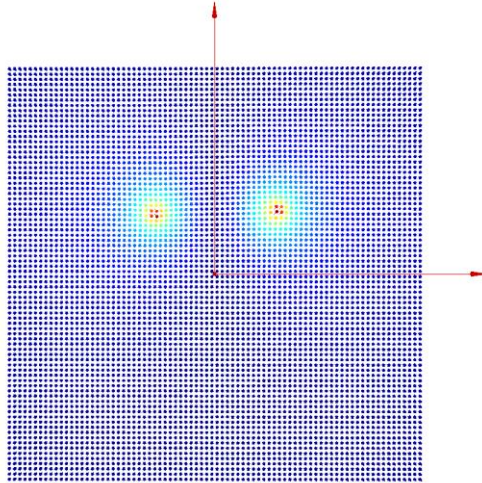
სურათი 17



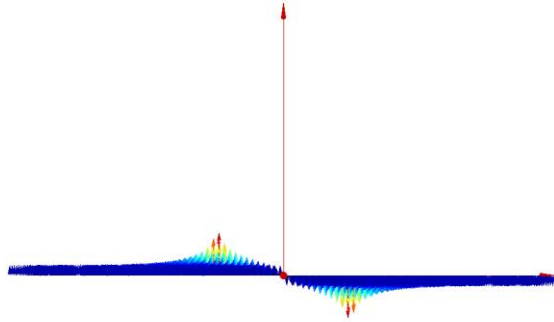
სურათი 18



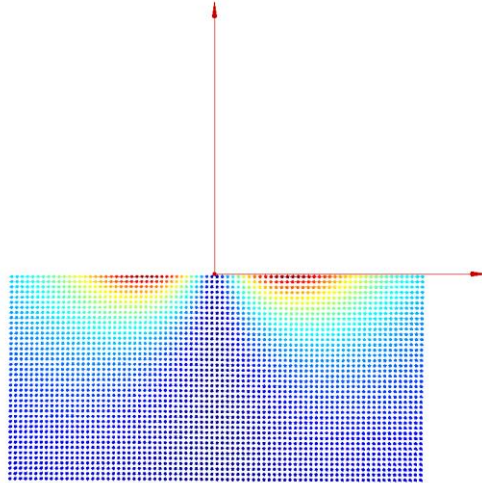
სურათი 19



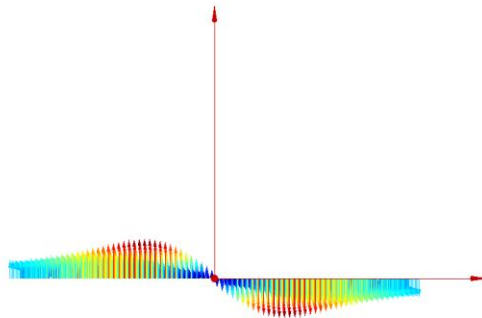
სურათი 20



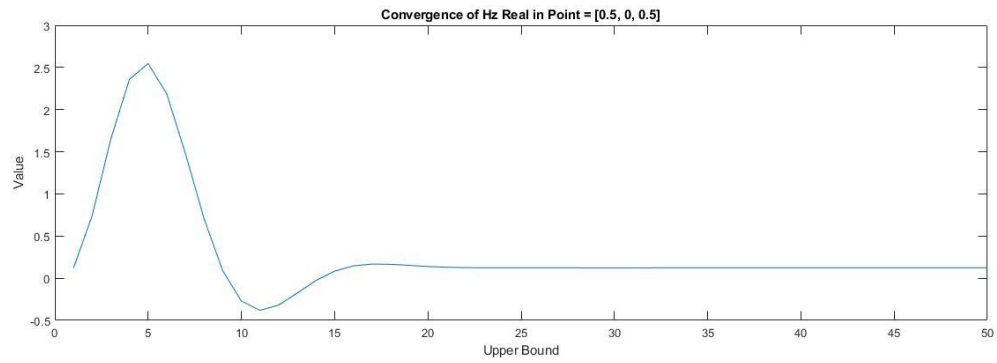
სურათი 21



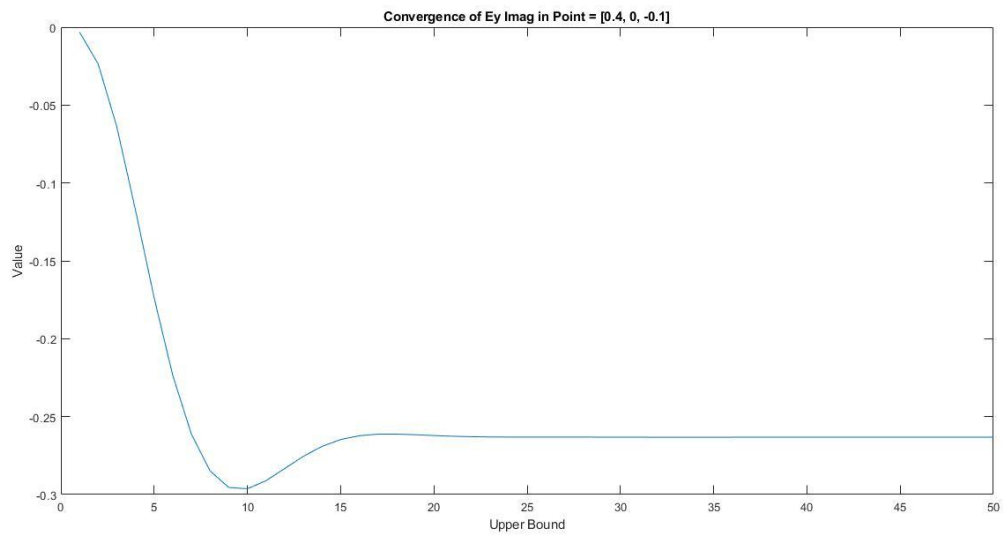
სურათი 22



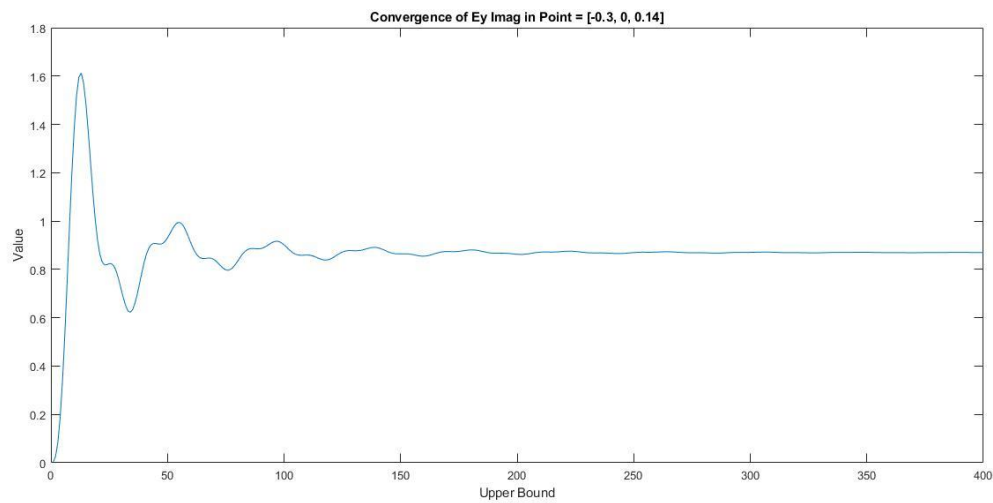
სურათი 23



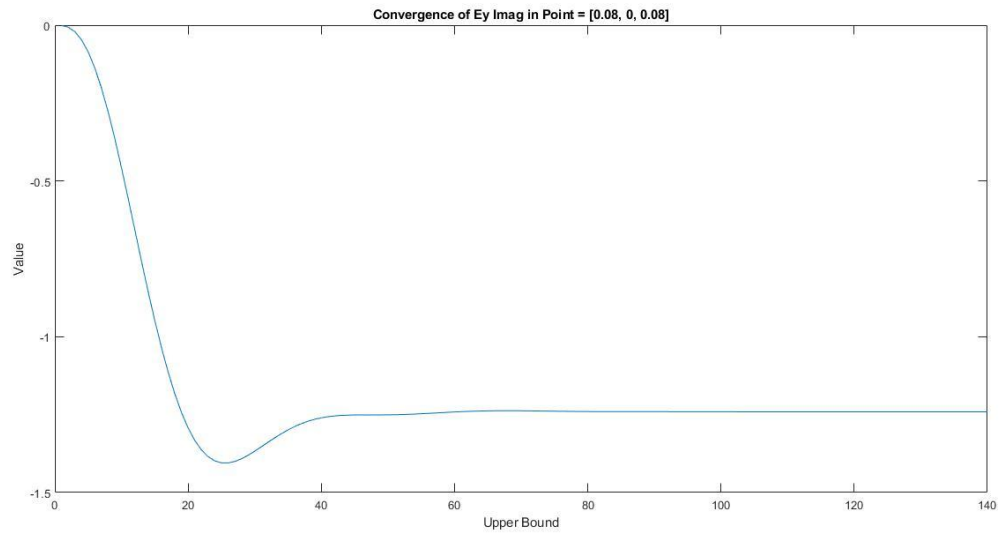
სურათი 24



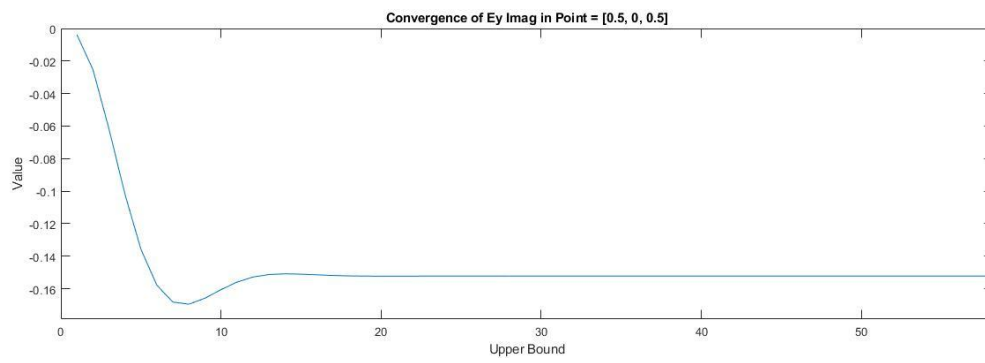
სურათი 25



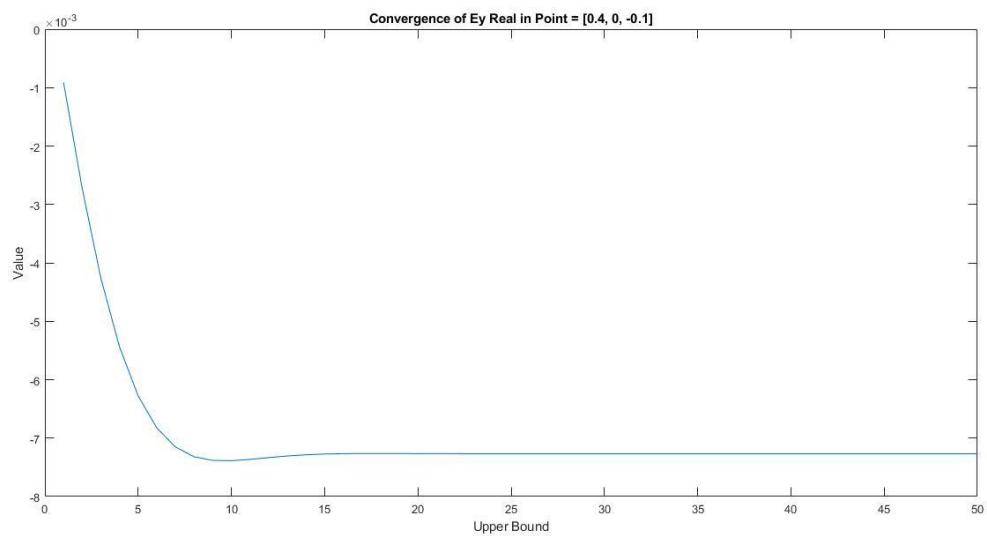
სურათი 26



სურათი 27

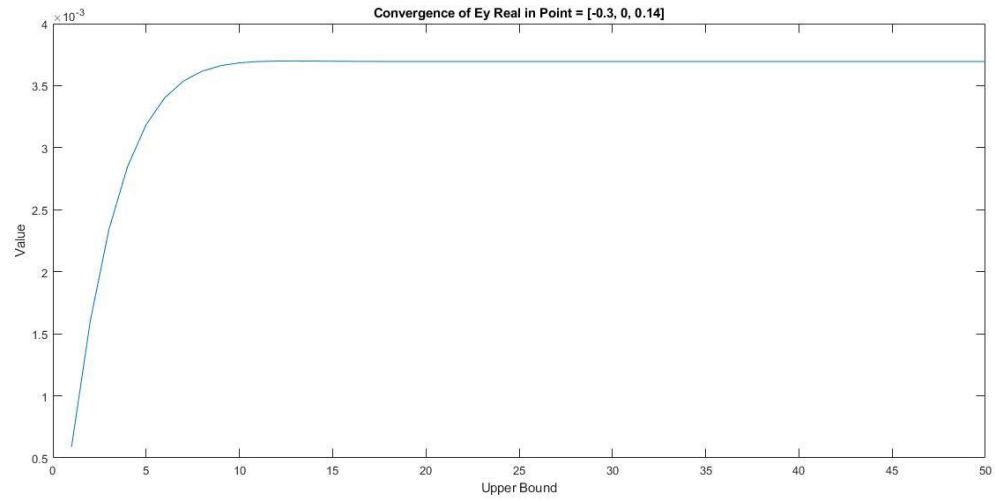


სურათი 28

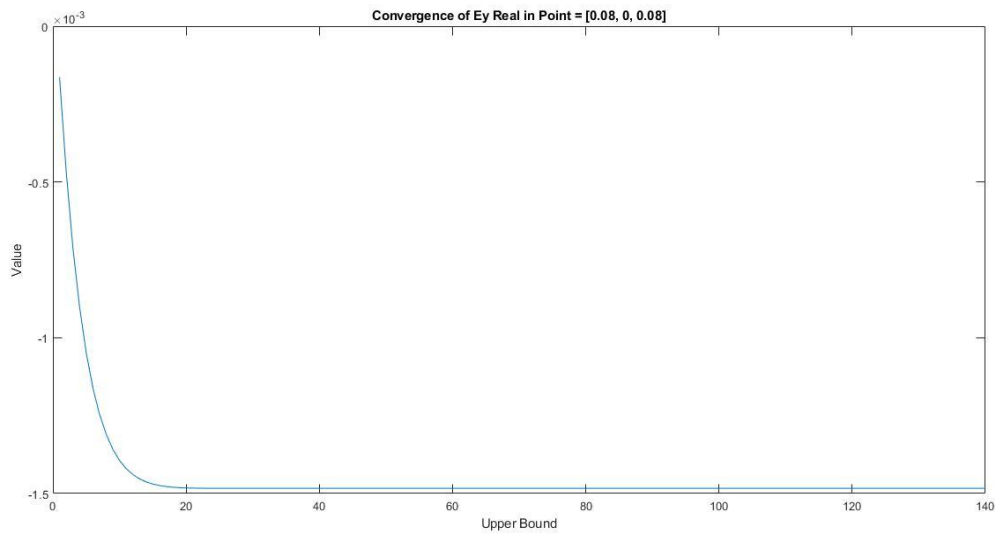


სურათი 29

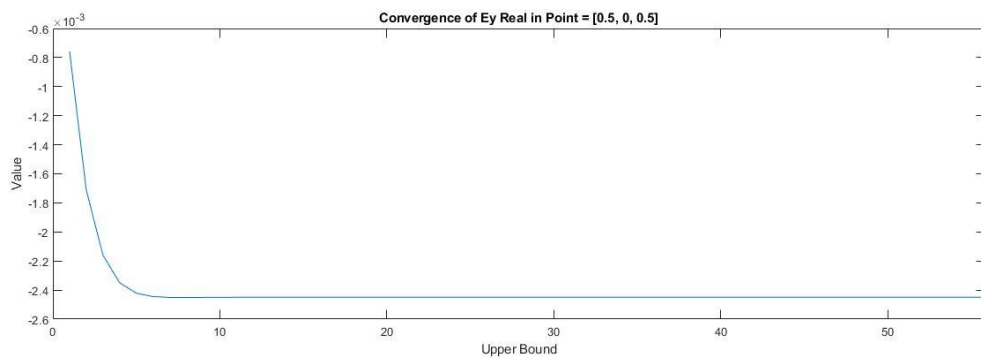




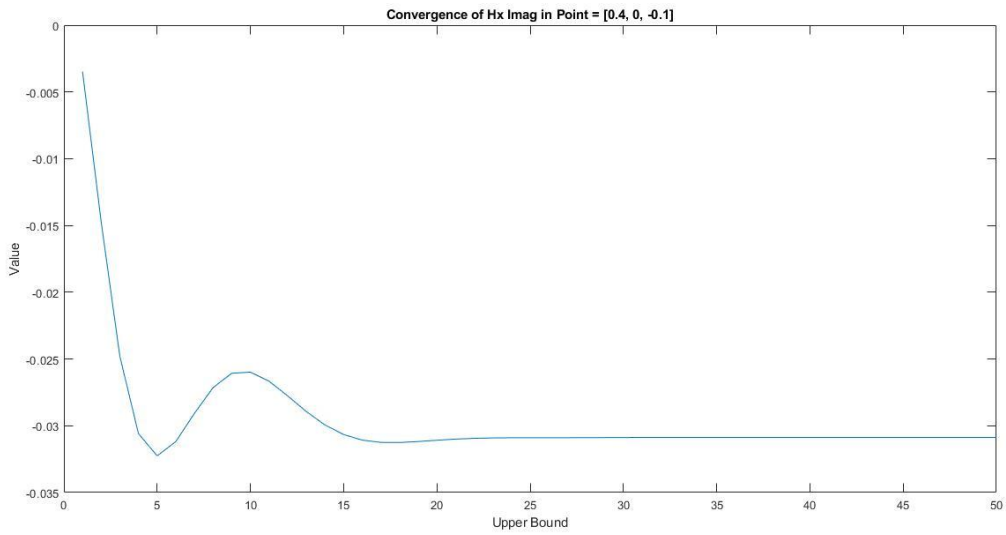
სურათი 30



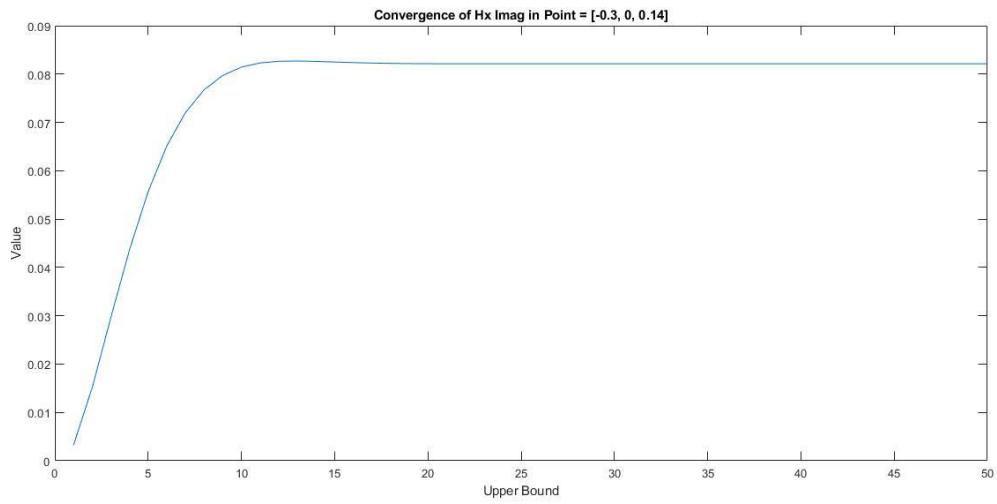
სურათი 31



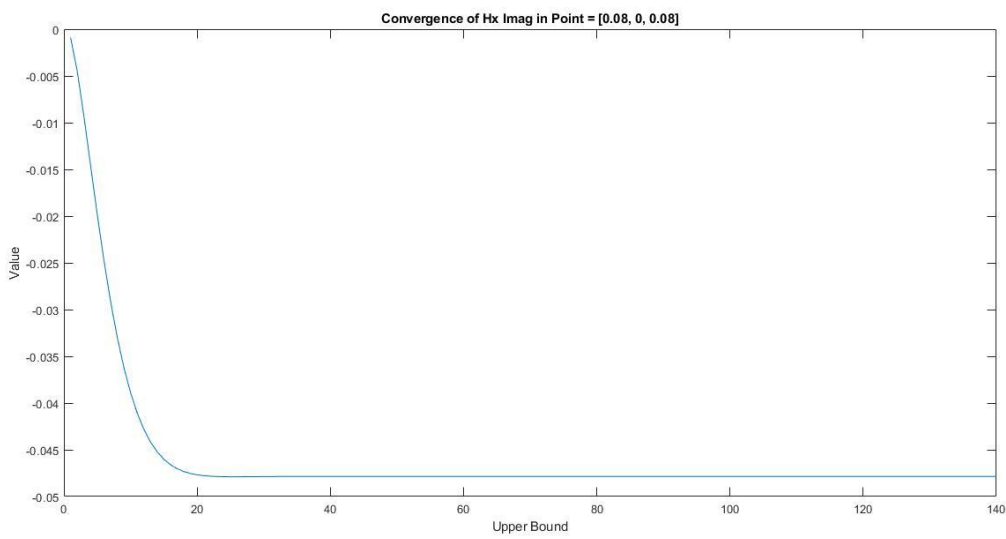
სურათი 32



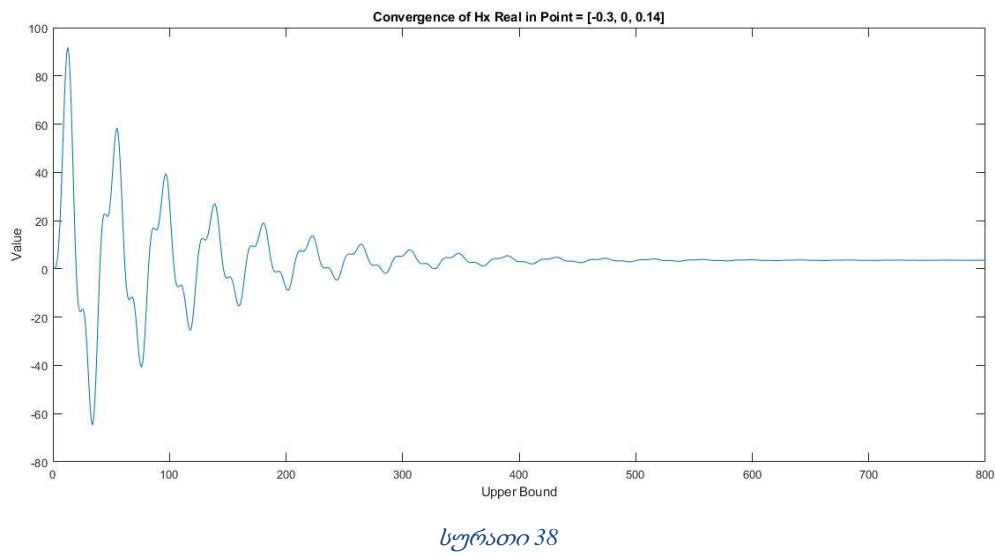
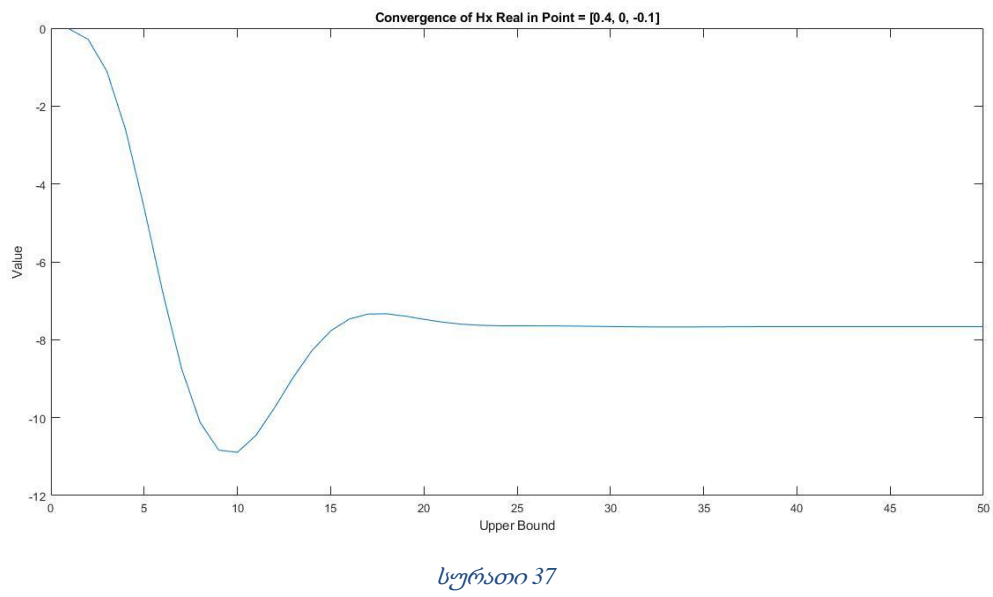
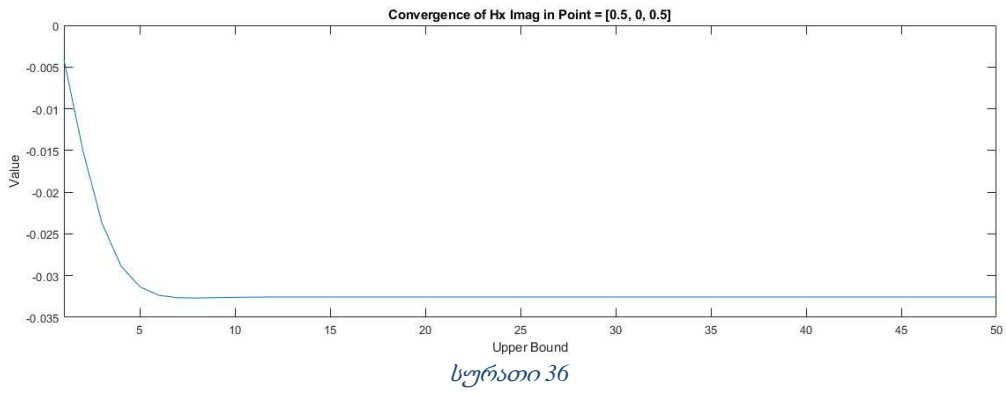
სურათი 33

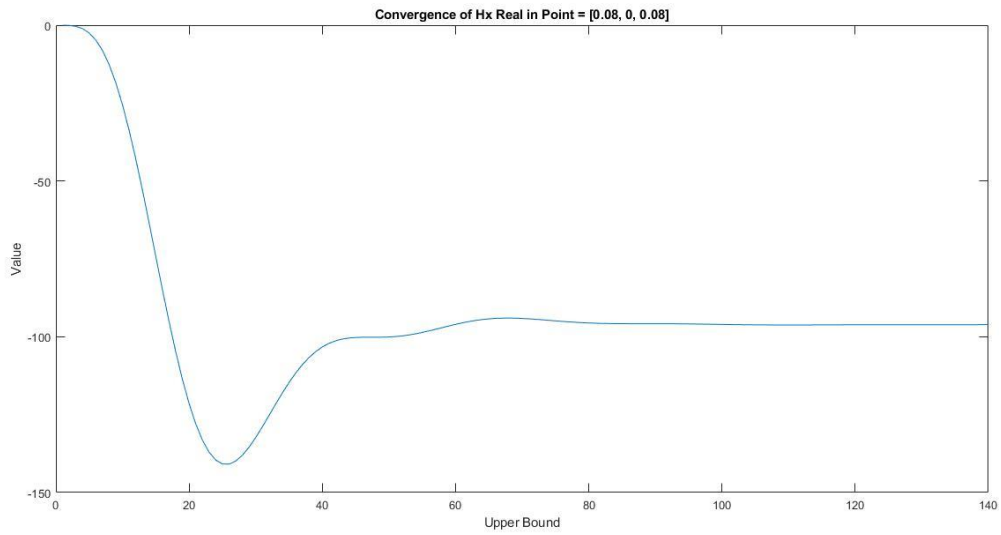


სურათი 34

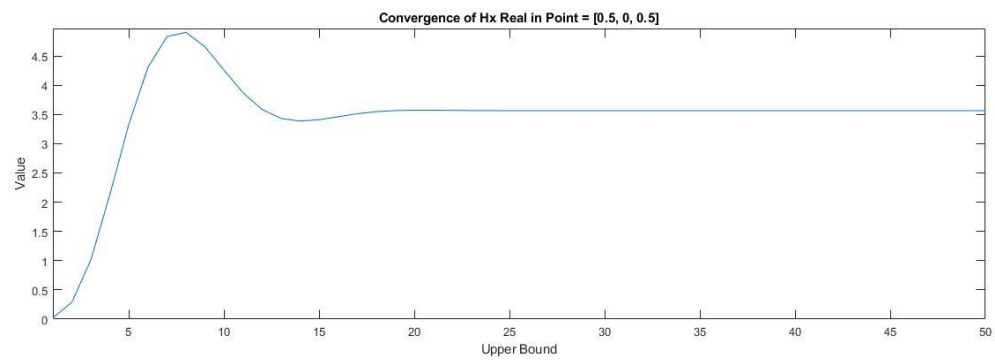


სურათი 35

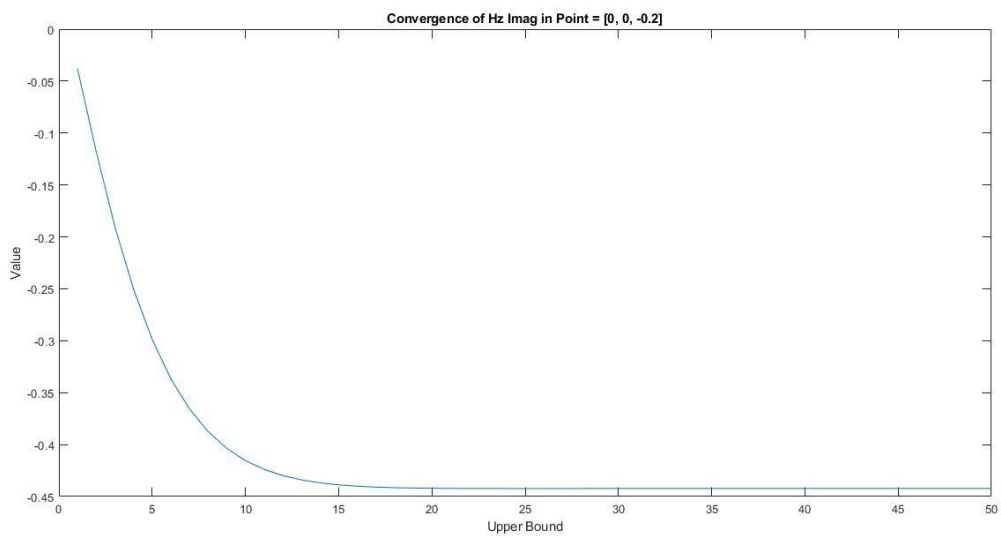




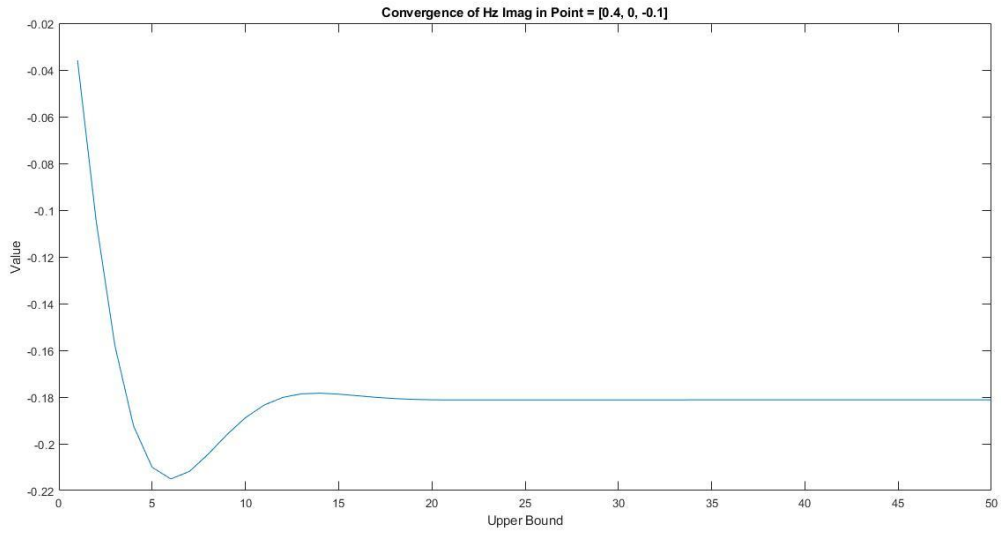
სურათი 39



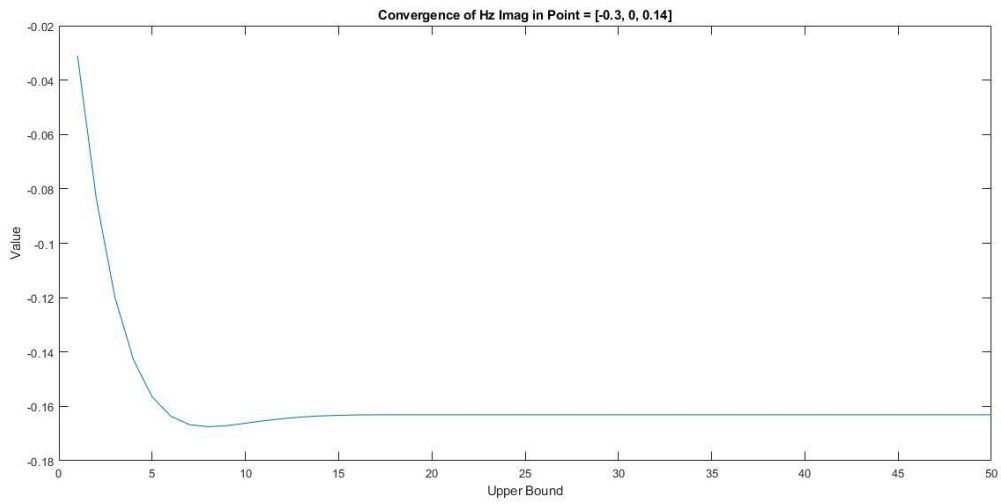
სურათი 40



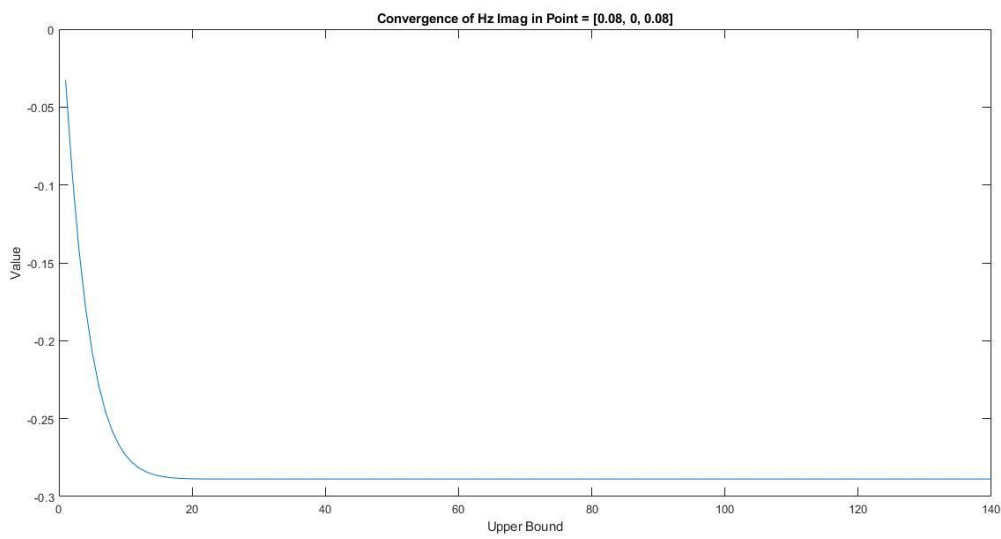
სურათი 41



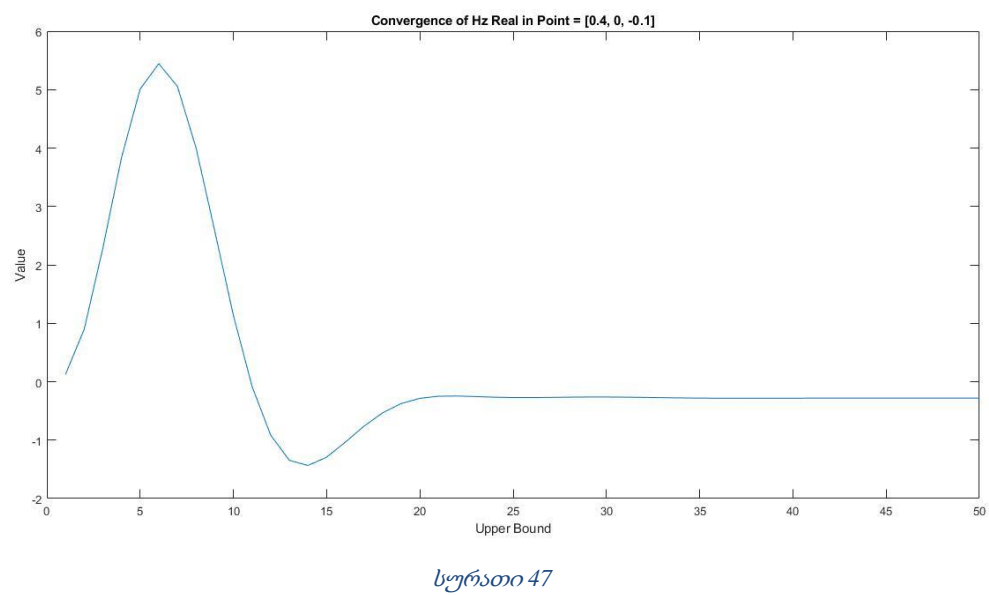
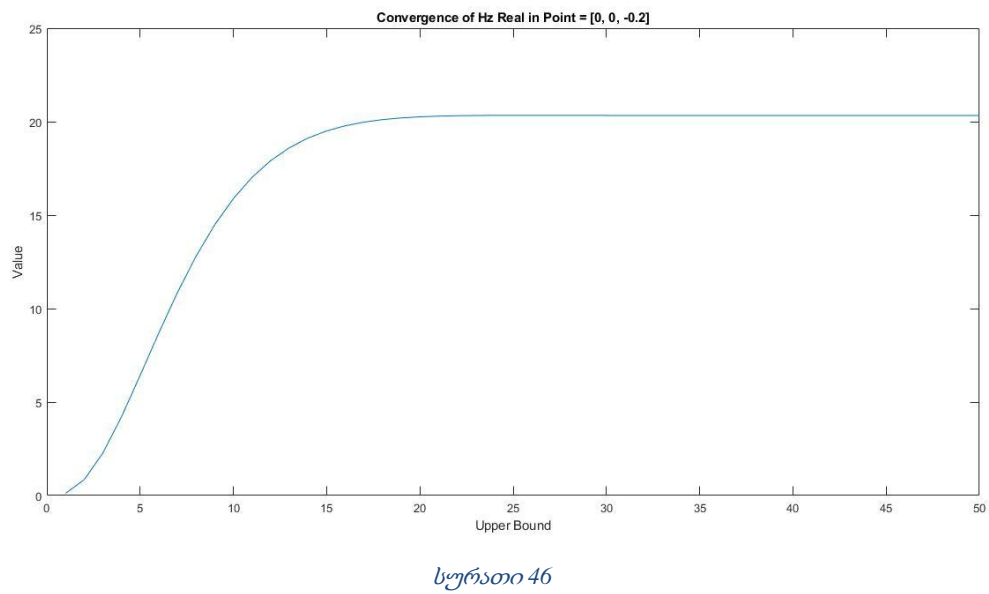
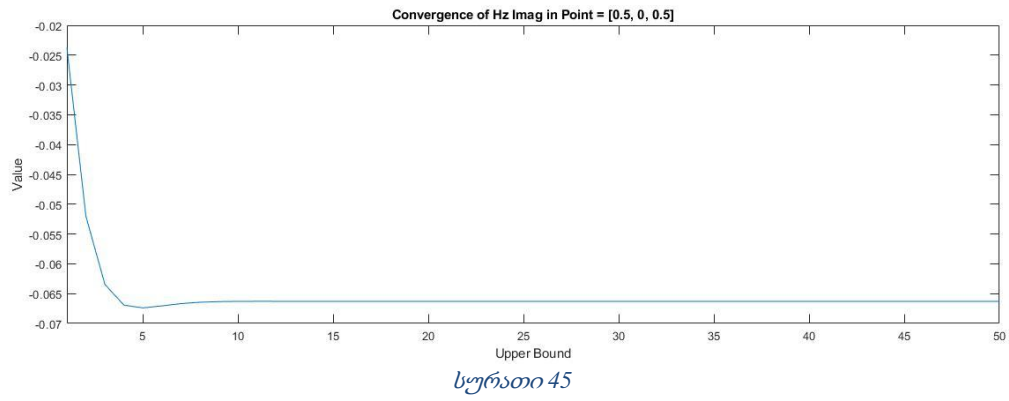
სურათი 42

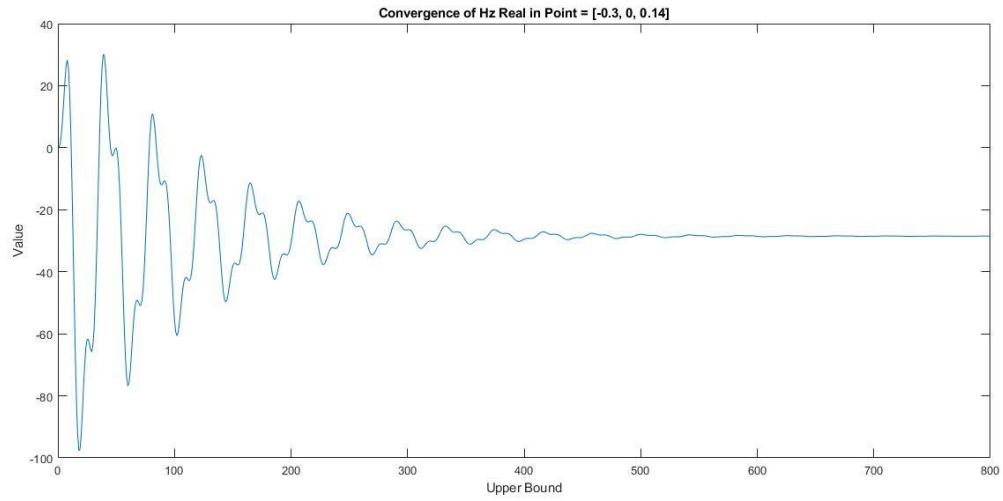


სურათი 43

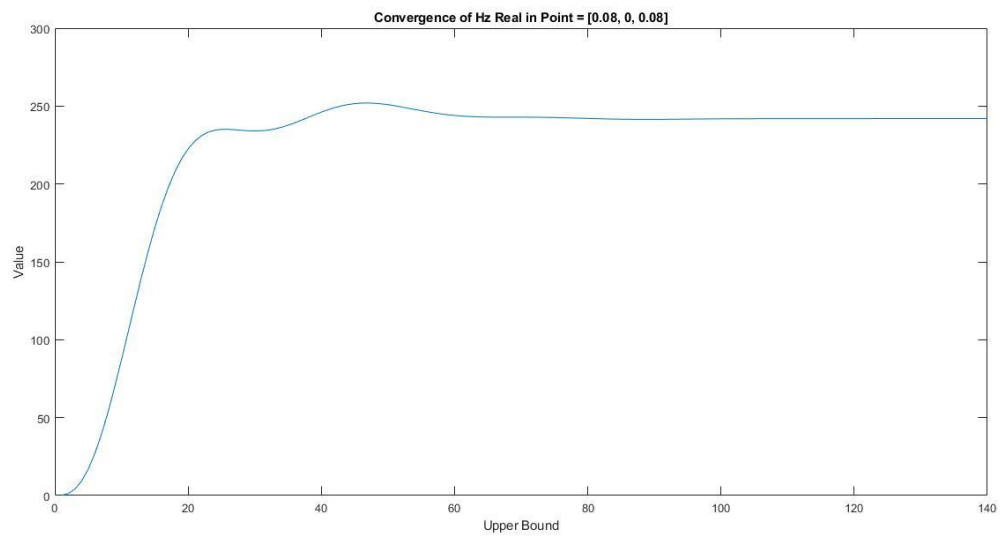


სურათი 44

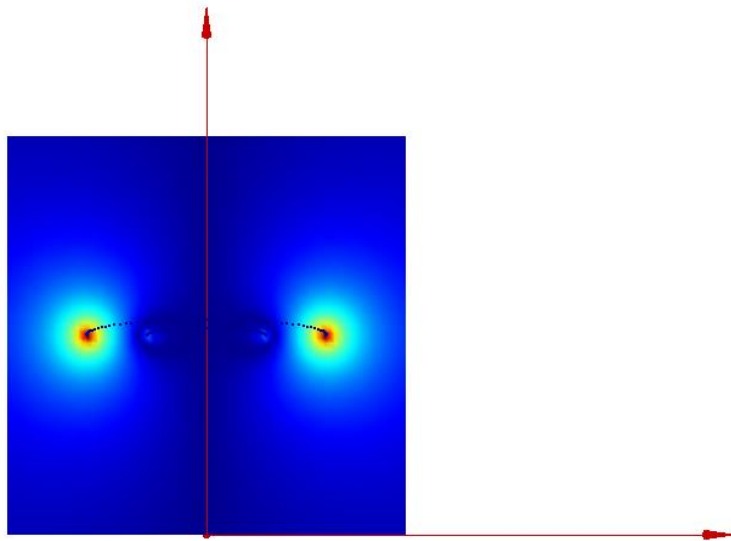




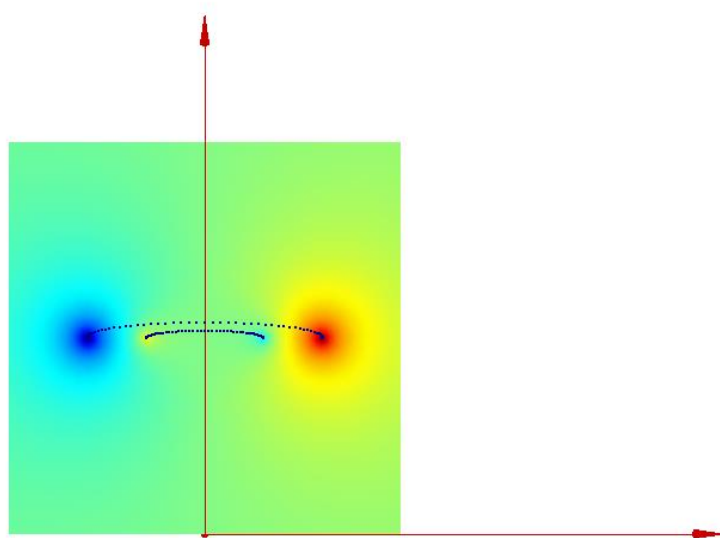
სურათი 48



სურათი 49

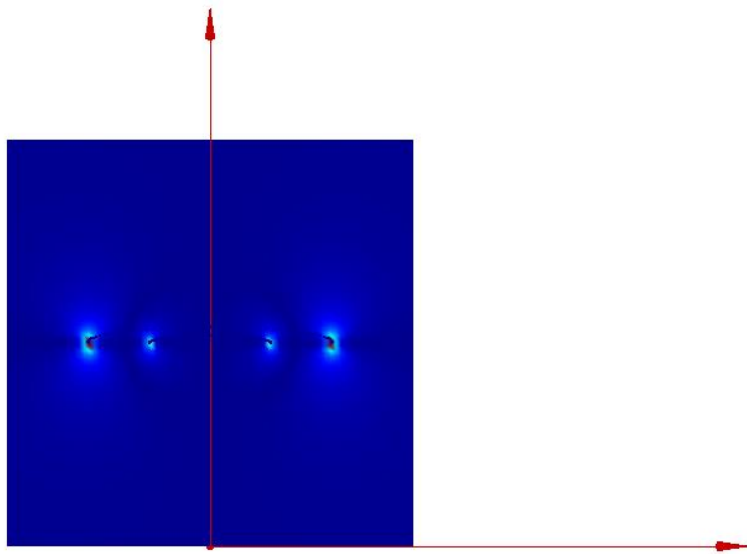


სურათი 50

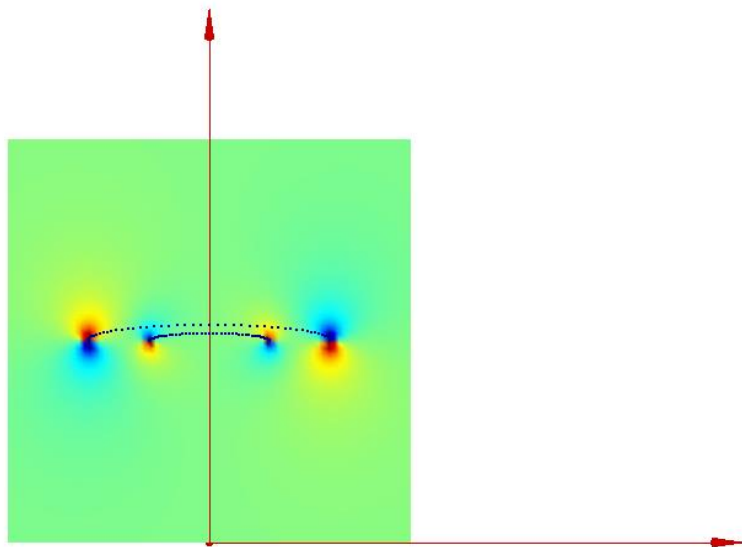


სურათი 51

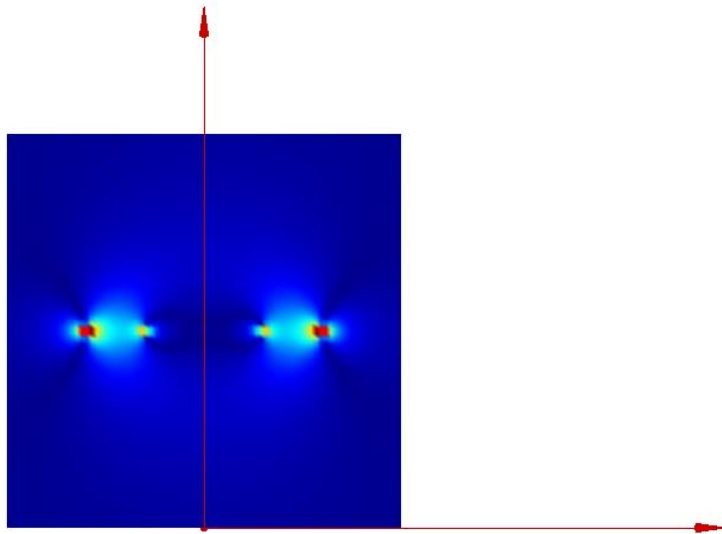




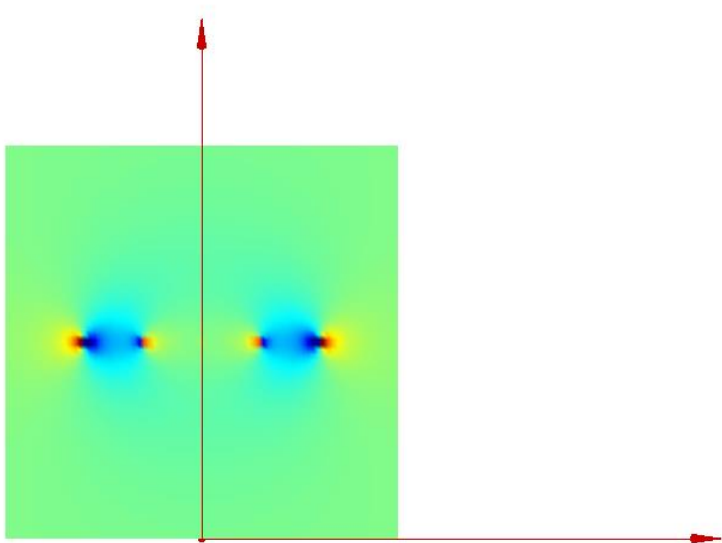
სურათი 52



სურათი 53



სურათი 54



სურათი 55

სურათი	აღწერა
სურათები 1 - 2	E ელექტრული ველის y კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცეში XZ სიბრტყეში
სურათები 3 - 4	H მაგნიტური ველის x კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცეში XZ სიბრტყეში
სურათები 5 - 6	H მაგნიტური ველის z კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცეში XZ სიბრტყეში
სურათები 7 - 8	დენის სიმკვრივის მნიშვნელობები ღია სივრცეში XZ სიბრტყეში
სურათი 9	H მაგნიტური ველის x და z კომპონენტების და E ველის y კომპონენტის მნიშვნელობების შედარება, რომლებიც გამოთვლილია 80 წერტილში XZ სიბრტყეში სხვადასხვა მეთოდის გამოყენებით
სურათი 10	H მაგნიტური ველის x და z კომპონენტების და E ველის y კომპონენტის მნიშვნელობების შედარება, რომლებიც გამოთვლილია 80 წერტილში XZ სიბრტყეში სხვადასხვა მეთოდის გამოყენებით
სურათი 11	საშუალო კვადრატული ცდომილება ჩვენს მიერ იმპლემენტირებული ი. დასის მეთოდით მიღებულ მნიშვნელობებს და EMCoS Studio-ში მიღებულ მნიშვნელობებს შორის
სურათი 12	ფარდობითი საშუალო კვადრატული ცდომილება ჩვენს მიერ იმპლემენტირებული ი. დასის მეთოდით მიღებულ მნიშვნელობებს და EMCoS Studio-ში მიღებულ მნიშვნელობებს შორის
სურათი 13	კვადრატული ცდომილება ჩვენს მიერ იმპლემენტირებული ი. დასის მეთოდით მიღებულ მნიშვნელობებს და MoM მეთოდით მიღებულ მნიშვნელობებს შორის
სურათი 14	E ელექტრული ველის y კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცესა და ნიადაგში XZ სიბრტყეში

სურათი 15	E ელექტრული ველის $y$ კომპონენტის მნიშვნელობები ნიადაგში XZ სიბრტყეში
სურათი 16	H მაგნიტური ველის $x$ კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცესა და ნიადაგში XZ სიბრტყეში
სურათი 17	H მაგნიტური ველის $x$ კომპონენტის მნიშვნელობები ნიადაგში XZ სიბრტყეში
სურათი 18	H მაგნიტური ველის $z$ კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცესა და ნიადაგში XZ სიბრტყეში
სურათი 19	H მაგნიტური ველის $z$ კომპონენტის მნიშვნელობები ნიადაგში XZ სიბრტყეში
სურათები 20 – 21	გრიგალური დენების განაწილება ღია სივრცესა და ნიადაგში XZ სიბრტყეში
სურათები 22 - 23	გრიგალური დენების განაწილება ნიადაგში XZ სიბრტყეში
სურათები 24 - 49	E ველის $y$ კომპონენტის და H ველის $x$ და $y$ კომპონენტების კრებადობა XZ სიბრტყის სხვადასხვა წერტილში
სურათები 50 - 51	GEM3-ის მიერ გამოსხივებული E ელექტრული ველის $y$ კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცეში XZ სიბრტყეში
სურათები 52 - 53	GEM3-ის მიერ გამოსხივებული H მაგნიტური ველის $x$ კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცეში XZ სიბრტყეში
სურათები 54 - 55	GEM3-ის მიერ გამოსხივებული H მაგნიტური ველის $z$ კომპონენტის მნიშვნელობები ღია სივრცეში XZ სიბრტყეში

## პროგრამული კოდი 1

```

clear all; clc; format long;

% Matrix Indices
X = 1;
Y = 2;
Z = 3;
F_X = 4;
F_Y = 5;
F_Z = 6;
F_FI = 7;
F_RO = 8;

I = 1; % Current
a = 0.15; % Radius of a Big Coil
b = 0.10; % Radius of a Small Coil
coil_pt_count = 100; % Number of points of coil model
miu_0 = 1.256 * 10 ^ -6; % Magnetic permeability of Air
eps_0 = 8.85 * 10 ^ -12; % Electrical permittivity of Air
miu_1 = 1 * miu_0; % Magnetic permeability of Soil
eps_1 = eps_0; % Electrical permittivity of Soil
sigma_1 = 0.000000000001; % Electrical conductivity of Soil
w = 100000; % Frequency
h = 0.5; % Height

gamma_0 = 0;
gamma_1 = sqrt(1i * sigma_1 * miu_1 * w);

% Axes
x_min = -0.5;
x_max = 0.5;
y = 0;
z_min = 0;
z_max = 1;

% Building a coil
i_coil = 0:1:coil_pt_count;
d = i_coil * 2 * pi / coil_pt_count;
coil_points = [a * cos(d)', a * sin(d)', h * ones(length(d), 1)];
file_coil = fopen('./Coil_m.plr', 'w');
fprintf(file_coil, ['Coil\n6\n', num2str(coil_pt_count)]);

for i = 1:coil_pt_count
    fprintf(file_coil, '\n%d %d %d', coil_points(i, 1), coil_points(i, 2),
coil_points(i, 3));
end

fclose(file_coil);

% Calculations
curr = I * a / 2 / 100;
curr_e = - (1i * miu_0 * w * I * a) / 2 / 100;
op = 0;
point_count = 80;
x_points = linspace(x_min, x_max, point_count);
z_points = linspace(z_min, z_max, point_count);
size_x = length(x_points);

```

```

size_z = length(z_points);
array_size = size_x * size_z;
op_max = array_size;
limit = 600;
arr_ind = 1;
E = zeros(array_size, 8);
H = zeros(array_size, 8);
message = '';
l = 0.00001:0.01:limit;
u0 = sqrt(l.^2);
u1 = sqrt(l.^2 + gamma_1.^2);
mag = (miu_1 * u0 - miu_0 * u1) ./ (miu_1 * u0 + miu_0 * u1);
mag_hro = 2 * miu_0 * u1 ./ (miu_1 * u0 + miu_0 * u1);
mag_hz = 2 * miu_0 * l ./ (miu_1 * u0 + miu_0 * u1);
mag_efi = 2 * miu_1 * l ./ (miu_1 * u0 + miu_0 * u1);
exp_uh = exp(- u0 * h);
bessel1_la = besselj(1, l * a);
besselj_la = besselj_la;
besselj1_la = besselj1_la;

for x = x_points
    fprintf(repmat('\b', 1, strlength(message)));
    message = "Operation " + op + " out of " + op_max;
    fprintf(message);
    for z = z_points
        op = op + 1;
        point = cart_to_cyl([x, y, z]);
        ro = point(1);
        fi = point(2);
        zh_sum = z + h;
        zh_diff = z - h;
        zh_diff_inv = - zh_diff;
        Hor_air = 0;
        Hor_soil = 0;
        Hoz_air = 0;
        Hoz_soil = 0;
        Eofi_air = 0;
        Eofi_soil = 0;

        if z > h
            exp_diff = exp(- u0 .* zh_diff);
            exp_sum = exp(- u0 .* zh_sum);

            besselj1_lro = besselj(1, l * ro);
            besselj1_mult = besselj1_la .* besselj1_lro;
            besselj0_mult = besselj(1, l * a) .* besselj(0, l * ro);

            Hor_air = sum(curr .* l .* besselj1_mult .* exp_diff);
            Hor_soil = sum(curr .* mag .* l .* besselj1_mult .* exp_sum);
            Hoz_air = sum(curr .* (l.^2 ./ u0) .* besselj0_mult .*
exp_diff);
            Hoz_soil = sum(curr .* mag .* l.^2 ./ u0 .* besselj0_mult .*
exp_sum);

            Eofi_air = sum(curr_e .* l ./ u0 .* besselj1_mult .* exp_diff);
            Eofi_soil = sum(curr_e .* mag .* l ./ u0 .* besselj1_mult .*
exp_sum);

            Hro = Hor_air + Hor_soil;
            Hfi = 0;
            Hx = Hro * cos(fi);

```

```

Hy = Hro * sin(fi);
Hz = Hoz_air + Hoz_soil;
Ero = 0;
Efi = Eofi_air + Eofi_soil;
Ex = - Efi * sin(fi);
Ey = Efi * cos(fi);
Ez = 0;
else
exp_diff_un = exp(- u0 * zh_diff_inv);
exp_sum_un = exp(- u0 * zh_sum);
besselj1_mult = besselj_la .* besselj(1, l * ro);
besselj0_mult = besselj_la .* besselj(0, l * ro);

Hor_air = sum(- curr .* l .* besselj1_mult .* exp_diff_un);
Hor_soil = sum(curr .* mag .* l .* besselj1_mult .*
exp_sum_un);
Hoz_air = sum(curr .* (l.^2 ./ u0) .* besselj0_mult .*
exp_diff_un);
Hoz_soil = sum(curr .* mag .* l.^2 ./ u0 .* besselj0_mult .*
exp_sum_un);
Eofi_air = sum(curr_e .* l ./ u0 .* besselj1_mult .*
exp_diff_un);
Eofi_soil = sum(curr_e .* mag .* l ./ u0 .* besselj1_mult .*
exp_sum_un);

Hro = Hor_air + Hor_soil;
Hfi = 0;
Hx = Hro * cos(fi);
Hy = Hro * sin(fi);
Hz = Hoz_air + Hoz_soil;
Ero = 0;
Efi = Eofi_air + Eofi_soil;
Ex = - Efi * sin(fi);
Ey = Efi * cos(fi);
Ez = 0;
end

% Filling the matrix in a format
% X Y Z Fx, Fy, Fz, Ffi, Fro
H(arr_ind, :) = [x, y, z, Hx, Hy, Hz, Hfi, Hro];
E(arr_ind, :) = [x, y, z, Ex, Ey, Ez, Efi, Ero];

arr_ind = arr_ind + 1;
end
end

J = [E(:, X), E(:, Y), E(:, Z), sigma_1 * E(:, F_X), sigma_1 * E(:, F_Y),
sigma_1 * E(:, F_Z)];

fprintf(repmat('\b', 1, strlength(message)));
message = "Operation " + op + " out of " + op_max;
fprintf(message);
fprintf('\nSaving Files...\n');

points_str = num2str(length(x_points));
arr_size = length(E);
arr_size_str = num2str(arr_size);

file_hx_xz = fopen('./Hx_xz_m.plr', 'w');
file_hy_xz = fopen('./Hy_xz_m.plr', 'w');

```

```

file_hx_xz = fopen('../Hx_xz_m.plr', 'w');
file_ex_xz = fopen('../Ex_xz_m.plr', 'w');
file_ey_xz = fopen('../Ey_xz_m.plr', 'w');
file_curr_dens = fopen('../Curr_Density_m.arr', 'w');
fprintf(file_hx_xz, ['Field Hx\n5\n', points_str]);
fprintf(file_hy_xz, ['Field Hy\n5\n', points_str]);
fprintf(file_hz_xz, ['Field Hz\n5\n', points_str]);
fprintf(file_ex_xz, ['Field Ex\n5\n', points_str]);
fprintf(file_ey_xz, ['Field Ey\n5\n', points_str]);
fprintf(file_curr_dens, ['Current Density\n', arr_size_str]);

for i = 1:arr_size
    x = E(i, 1);
    y = E(i, 2);
    z = E(i, 3);

    fprintf(file_hx_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H(i, F_X)),
    imag(H(i, F_X)));
    fprintf(file_hy_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H(i, F_Y)),
    imag(H(i, F_Y)));
    fprintf(file_hz_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H(i, F_Z)),
    imag(H(i, F_Z)));
    fprintf(file_ex_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(E(i, F_X)),
    imag(E(i, F_X)));
    fprintf(file_ey_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(E(i, F_Y)),
    imag(E(i, F_Y)));
    fprintf(file_curr_dens, '\n%d %d %d %d %d %d %d %d %d %d', x, y, z,
    real(J(i, F_X)), imag(J(i, F_X)), real(J(i, F_Y)), imag(J(i, F_Y)),
    real(J(i, F_Z)), imag(J(i, F_Z)));
end

fclose(file_hx_xz);
fclose(file_hy_xz);
fclose(file_hz_xz);
fclose(file_ex_xz);
fclose(file_ey_xz);
fclose(file_curr_dens);

function new_point = cart_to_cyl(point)
    if ~ isvector(point) || length(point) < 3
        error('Input must be a 3-D point')
    end

    x = point(1);
    y = point(2);
    z = point(3);
    ro = sqrt(x ^ 2 + y ^ 2);
    fi = atan2(y, x);
    new_point = [ro, fi, z];
end

```



## პროგრამული კოდი 2

```

clear all; clc; format long; % Clearing memory

% Matrix Indices
X = 1;
Y = 2;
Z = 3;
F_X = 4;
F_Y = 5;
F_Z = 6;
F_FI = 7;
F_RO = 8;

I = 1; % Current
a = 0.30; % Radius of a Big Coil
b = 0.10; % Radius of a Small Coil
coil_pt_count = 100; % Number of points of coil model
miu_0 = 1.256 * 10 ^ -6; % Magnetic permeability of Air
eps_0 = 8.85 * 10 ^ -12; % Electrical permittivity of Air
miu_1 = 1 * miu_0; % Magnetic permeability of Soil
eps_1 = 5 * eps_0; % Electrical permittivity of Soil
sigma_1 = 5; % Electrical conductivity of Soil
w = 100000; % Frequency
h = 0.5; % Height

gamma_0 = 0;
gamma_1 = sqrt(1i * sigma_1 * miu_1 * w);

% Axes
x_min = - 0.5;
x_max = 0.5;
y = 0;
z_min = - 0.5;
z_max = 0.5;

% Building a coil
i_coil = 0:1:coil_pt_count;
d = i_coil * 2 * pi / coil_pt_count;
coil_points = [a * cos(d)', a * sin(d)', h * ones(length(d), 1)];
file_coil = fopen('./Coil_m.plr', 'w');
fprintf(file_coil, ['Coil\n6\n', num2str(coil_pt_count)]);

for i = 1:coil_pt_count
    fprintf(file_coil, '\n%d %d %d', coil_points(i, 1), coil_points(i, 2),
coil_points(i, 3));
end

fclose(file_coil);

% Calculations
curr = I * a / 2 / 100;
curr_e = - (1i * miu_0 * w * I * a) / 2 / 100;
op = 0;
point_count = 80;
x_points = linspace(x_min, x_max, point_count);
z_points = linspace(z_min, z_max, point_count);
size_x = length(x_points);

```

```

size_z = length(z_points);
array_size = size_x * size_z;
op_max = array_size;
limit = 600;
arr_ind = 1;
E = zeros(array_size, 8);
H = zeros(array_size, 8);
message = '';
l = 0.00001:0.01:limit;
u0 = sqrt(l.^2);
u1 = sqrt(l.^2 + gamma_1.^2);
mag = (miu_1 * u0 - miu_0 * u1) ./ (miu_1 * u0 + miu_0 * u1);
mag_hro = 2 * miu_0 * u1 ./ (miu_1 * u0 + miu_0 * u1);
mag_hz = 2 * miu_0 * l ./ (miu_1 * u0 + miu_0 * u1);
mag_efi = 2 * miu_1 * l ./ (miu_1 * u0 + miu_0 * u1);
exp_uh = exp(- u0 * h);
bessell_la = besselj(1, l * a);
besselj_la = bessell_la;
besselj1_la = bessell_la;

for x = x_points
    fprintf(repmat('\b', 1, strlength(message)));
    message = "Operation " + op + " out of " + op_max;
    fprintf(message);
    for z = z_points
        op = op + 1;
        point = cart_to_cyl([x, y, z]);
        ro = point(1);
        fi = point(2);
        zh_sum = z + h;
        zh_diff = z - h;
        zh_diff_inv = - zh_diff;
        Hor_air = 0;
        Hor_soil = 0;
        Hoz_air = 0;
        Hoz_soil = 0;
        Eofi_air = 0;
        Eofi_soil = 0;

        if z > h
            % Over the coil
            exp_diff = exp(- u0 .* zh_diff);
            exp_sum = exp(- u0 .* zh_sum);

            besselj1_lro = besselj(1, l * ro);
            besselj1_mult = besselj1_la .* besselj1_lro;
            besselj0_mult = besselj(1, l * a) .* besselj(0, l * ro);

            Hor_air = sum(curr .* l .* besselj1_mult .* exp_diff);
            Hor_soil = sum(curr .* mag .* l .* besselj1_mult .* exp_sum);
            Hoz_air = sum(curr .* (l.^2 ./ u0) .* besselj0_mult .*
exp_diff);
            Hoz_soil = sum(curr .* mag .* l.^2 ./ u0 .* besselj0_mult .*
exp_sum);

            Eofi_air = sum(curr_e .* l ./ u0 .* besselj1_mult .* exp_diff);
            Eofi_soil = sum(curr_e .* mag .* l ./ u0 .* besselj1_mult .*
exp_sum);

            Hro = Hor_air + Hor_soil;
            Hfi = 0;

```

```

Hx = Hro * cos(fi);
Hy = Hro * sin(fi);
Hz = Hoz_air + Hoz_soil;
Ero = 0;
Efi = Eofi_air + Eofi_soil;
Ex = - Efi * sin(fi);
Ey = Efi * cos(fi);
Ez = 0;
elseif z > 0 && z < h
    % Under the coil over the soil
    exp_diff_un = exp(- u0 * zh_diff_inv);
    exp_sum_un = exp(- u0 * zh_sum);
    besselj1_mult = besselj_la .* besselj(1, l * ro);
    besselj0_mult = besselj_la .* besselj(0, l * ro);

    Hor_air = sum(- curr .* l .* besselj1_mult .* exp_diff_un);
    Hor_soil = sum(curr .* mag .* l .* besselj1_mult .*
exp_sum_un);
    Hoz_air = sum(curr .* (l.^2 ./ u0) .* besselj0_mult .*
exp_diff_un);
    Hoz_soil = sum(curr .* mag .* l.^2 ./ u0 .* besselj0_mult .*
exp_sum_un);
    Eofi_air = sum(curr_e .* l ./ u0 .* besselj1_mult .*
exp_diff_un);
    Eofi_soil = sum(curr_e .* mag .* l ./ u0 .* besselj1_mult .*
exp_sum_un);

    Hro = Hor_air + Hor_soil;
    Hfi = 0;
    Hx = Hro * cos(fi);
    Hy = Hro * sin(fi);
    Hz = Hoz_air + Hoz_soil;
    Ero = 0;
    Efi = Eofi_air + Eofi_soil;
    Ex = - Efi * sin(fi);
    Ey = Efi * cos(fi);
    Ez = 0;
else
    % In the soil
    exp_uz = exp(u1 * z);
    exp_full = exp_uz .* exp_uh;
    bessell_lr = besselj(1, l * ro);
    bessell0_lr = besselj(0, l * ro);

    Hlr_soil = sum(- curr * mag_hro .* l .* bessell_la .*
bessell_lr .* exp_full);
    Hlz_soil = sum(curr * mag_hz .* l .* bessell_la .* bessell0_lr
.* exp_full);
    Elfi_soil = sum(curr_e * mag_efi .* bessell_la .* bessell_lr .*
exp_full);

    Hro = Hlr_soil;
    Hfi = 0;
    Hx = Hro * cos(fi);
    Hy = Hro * sin(fi);
    Hz = Hlz_soil;
    Ero = 0;
    Efi = Elfi_soil;
    Ex = - Efi * sin(fi);
    Ey = Efi * cos(fi);

```

```

        Ez = 0;
    end

    % Filling the matrix in a format
    % X Y Z Fx, Fy, Fz, Ffi, Fro
    H(arr_ind, :) = [x, y, z, Hx, Hy, Hz, Hfi, Hro];
    E(arr_ind, :) = [x, y, z, Ex, Ey, Ez, Efi, Ero];

    arr_ind = arr_ind + 1;
end

end

% Current Density
J = [E(:, X), E(:, Y), E(:, Z), sigma_1 * E(:, F_X), sigma_1 * E(:, F_Y),
sigma_1 * E(:, F_Z)];

fprintf(repmat('\b', 1, strlen(message)));
message = "Operation " + op + " out of " + op_max;
fprintf(message);
fprintf('\nSaving Files...\n');

points_str = num2str(length(x_points));
arr_size = length(E);
arr_size_str = num2str(arr_size);

% Creating files
file_hx_xz = fopen('../Hx_xz_m.plr', 'w');
file_hy_xz = fopen('../Hy_xz_m.plr', 'w');
file_hz_xz = fopen('../Hz_xz_m.plr', 'w');
file_ex_xz = fopen('../Ex_xz_m.plr', 'w');
file_ey_xz = fopen('../Ey_xz_m.plr', 'w');
file_curr_dens = fopen('../Curr_Density_m.arr', 'w');
file_hx_xz_soil = fopen('../Hx_xz_soil_m.plr', 'w');
file_hy_xz_soil = fopen('../Hy_xz_soil_m.plr', 'w');
file_hz_xz_soil = fopen('../Hz_xz_soil_m.plr', 'w');
file_ex_xz_soil = fopen('../Ex_xz_soil_m.plr', 'w');
file_ey_xz_soil = fopen('../Ey_xz_soil_m.plr', 'w');
file_curr_dens_soil = fopen('../Curr_Density_soil_m.arr', 'w');
fprintf(file_hx_xz, ['Field Hx\n5\n', points_str]);
fprintf(file_hy_xz, ['Field Hy\n5\n', points_str]);
fprintf(file_hz_xz, ['Field Hz\n5\n', points_str]);
fprintf(file_ex_xz, ['Field Ex\n5\n', points_str]);
fprintf(file_ey_xz, ['Field Ey\n5\n', points_str]);
fprintf(file_curr_dens, ['Current Density\n', arr_size_str]);

% Plotting
for i = 1:arr_size
    x = E(i, 1);
    y = E(i, 2);
    z = E(i, 3);

    fprintf(file_hx_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H(i, F_X)),
    imag(H(i, F_X)));
    fprintf(file_hy_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H(i, F_Y)),
    imag(H(i, F_Y)));
    fprintf(file_hz_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H(i, F_Z)),
    imag(H(i, F_Z)));
    fprintf(file_ex_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(E(i, F_X)),
    imag(E(i, F_X)));

```

```

    fprintf(file_ey_xz, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(E(i, F_Y)),
    imag(E(i, F_Y)));
    fprintf(file_curr_dens, '\n%d %d %d %d %d %d %d %d %d %d', x, y, z,
    real(J(i, F_X)), imag(J(i, F_X)), real(J(i, F_Y)), imag(J(i, F_Y)),
    real(J(i, F_Z)), imag(J(i, F_Z)));
end

points_str = [num2str(length(x_points) / 2), ' ',
num2str(length(x_points))];
arr_size = length(E) / 2;
arr_size_str = num2str(arr_size);

E_soil = E(E(:, Z) < 0, :);
H_soil = H(H(:, Z) < 0, :);
J_soil = [E_soil(:, X), E_soil(:, Y), E_soil(:, Z), sigma_1 * E_soil(:,
F_X), sigma_1 * E_soil(:, F_Y), sigma_1 * E_soil(:, F_Z)];

fprintf(file_hx_xz_soil, ['Field Hx in Soil\n5\n', points_str]);
fprintf(file_hy_xz_soil, ['Field Hy in Soil\n5\n', points_str]);
fprintf(file_hz_xz_soil, ['Field Hz in Soil\n5\n', points_str]);
fprintf(file_ex_xz_soil, ['Field Ex in Soil\n5\n', points_str]);
fprintf(file_ey_xz_soil, ['Field Ey in Soil\n5\n', points_str]);
fprintf(file_curr_dens_soil, ['Current Density in Soil\n', arr_size_str]);

for i = 1:arr_size
    x = E_soil(i, 1);
    y = E_soil(i, 2);
    z = E_soil(i, 3);

    fprintf(file_hx_xz_soil, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H_soil(i,
F_X)), imag(H_soil(i, F_X)));
    fprintf(file_hy_xz_soil, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H_soil(i,
F_Y)), imag(H_soil(i, F_Y)));
    fprintf(file_hz_xz_soil, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(H_soil(i,
F_Z)), imag(H_soil(i, F_Z)));
    fprintf(file_ex_xz_soil, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(E_soil(i,
F_X)), imag(E_soil(i, F_X)));
    fprintf(file_ey_xz_soil, '\n%d %d %d %d %d', x, 0, z, real(E_soil(i,
F_Y)), imag(E_soil(i, F_Y)));
    fprintf(file_curr_dens_soil, '\n%d %d %d %d %d %d %d %d %d %d', x, y, z,
real(J_soil(i, F_X)), imag(J_soil(i, F_X)), real(J_soil(i, F_Y)),
imag(J_soil(i, F_Y)), real(J_soil(i, F_Z)), imag(J_soil(i, F_Z)));
end

fclose(file_hx_xz);
fclose(file_hy_xz);
fclose(file_hz_xz);
fclose(file_ex_xz);
fclose(file_ey_xz);
fclose(file_curr_dens);
fclose(file_hx_xz_soil);
fclose(file_hy_xz_soil);
fclose(file_hz_xz_soil);
fclose(file_ex_xz_soil);
fclose(file_ey_xz_soil);
fclose(file_curr_dens_soil);

function new_point = cart_to_cyl(point)
    if ~ isvector(point) || length(point) < 3
        error('Input must be a 3-D point')
    end
end

```

```
end

x = point(1);
y = point(2);
z = point(3);
ro = sqrt(x ^ 2 + y ^ 2);
fi = atan2(y, x);
new_point = [ro, fi, z];
end
```